

نام درس: فرآیند تصادفی ۱  
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد: ۱۱۱۷۰۲۹)  
ریاضی (محض و کاربردی: ۱۱۱۰۵۳)  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از: ماشین حساب  
مجاز است.

تنها با یاد اوست که دل‌ها آرام می‌گیرد.

۱. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل و هندسی به ترتیب با پارامترهای  $P_1, \dots, P_n$  باشند. آنگاه مینیمم مشاهدات چه توزیعی دارد؟

الف. هندسی با پارامتر  $\sum_{i=1}^n P_i$   
ب. نمایی با پارامتر  $P_1 P_2 \dots P_n$

ج. هندسی با پارامتر  $P_1 P_2 \dots P_n$   
د. هندسی با پارامتر  $1 - P_1 P_2 \dots P_n$

۲. اگر  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح نامنفی با امید ریاضی ۵ باشد. آنگاه مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$  چقدر است؟

الف. ۲۵  
ب. ۵  
ج. ۱۰  
د. نامشخص

۳. اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع مولد احتمال  $e^{-\lambda} (1 - \frac{ps}{1 - qs})$  باشد، امید ریاضی  $X$  کدامست؟

الف.  $\frac{\lambda}{P}$   
ب.  $\frac{P}{\lambda}$   
ج.  $\lambda P$   
د.  $\lambda + P$

۴. در سؤال شماره (۳) مقدار واریانس متغیر  $X$  چیست؟

الف.  $\frac{\lambda(1+p)}{q}$   
ب.  $\frac{\lambda(1-q)}{p}$   
ج.  $\frac{1-q}{p}$   
د.  $\frac{\lambda(1+q)}{p}$

۵. اگر  $\{N_t, t \geq 0\}$  یک فرآیند تصادفی پواسن با پارامتر ۴ باشد.  $E(N_1 N_4)$  چیست؟

الف. ۶۴  
ب. ۱۶  
ج. ۶۱  
د. ۸۰

۶. در فرآیند قدم زدن تصادفی احتمال آنکه متحرک پس از سه واحد زمانی در نقطه ۲ - قرار بگیرد چیست؟

الف.  $q^3$   
ب.  $r^3 + 2pq$   
ج.  $3rq^2$   
د.  $p^3$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

نام درس: فرآیند تصادفی ۱  
رشته تحصیلی / کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد: ۱۱۱۷۰۲۹)

ریاضی (محض و کاربردی: ۱۱۱۰۵۳)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

کد سری سؤال: یک (۱)

۷. زنجیر مارکوفی با ماتریس احتمال انتقال زیر مفروض است، مقدار  $(P_{01}^2, f_{01}^2)$  کدامند؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الف.  $(\frac{4}{15}, \frac{32}{75})$  ب.  $(\frac{32}{75}, \frac{4}{15})$

ج.  $(\frac{4}{25}, \frac{4}{15})$  د.  $(\frac{4}{15}, \frac{4}{25})$

۸. در مسأله ورشکستگی قمارباز با فرض  $\lambda = \frac{q}{p}$  و  $P_a$  به عنوان احتمال ورشکستگی شخص با سرمایه  $a$ ، مقدار

$\lim_{b \rightarrow \infty} P_a$  برابر است با  $(p > q)$ :

الف.  $(\frac{p}{q})^a$  ب.  $(\frac{q}{p})^b$  ج.  $(\frac{q}{p})^a$  د.  $(\frac{p}{q})^b$

۹. زنجیر مارکوفی با ماتریس احتمال انتقال زیر و با فضای حالت  $E = \{0, 1, 2\}$  مفروض است. با فرض  $A = \{1, 2\}$ ،

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$P_0(T_A = 3)$  چیست؟

الف.  $\frac{16}{75}$  ب.  $\frac{61}{75}$

ج.  $\frac{4}{25}$  د.  $\frac{16}{25}$

۱۰. در سلسله شماره (۹) اگر  $A = \{2\}$  باشد،  $P_0(T_A = 2)$  چیست؟

الف.  $\frac{3}{60}$  ب.  $\frac{21}{60}$  ج.  $\frac{4}{15}$  د.  $\frac{1}{12}$

نام درس: فرآیند تصادفی ۱  
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد: ۱۱۱۷۰۲۹)  
ریاضی (محض و کاربردی: ۱۱۱۰۵۳)  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از: ماشین حساب  
مجاز است.

۱۱. در زنجیر تحویلناپذیر و گذرا توزیع مانا .....

الف. وجود ندارد. ب. همواره وجود دارد.

ج. تحت شرایطی وجود دارد. د. وجود دارد و یکتا است.

۱۲. کدام مورد درباره زنجیر زاد و مرگ با  $P_x = \frac{3}{4}$  و  $q_x = \frac{1}{4}$  درست است؟

الف. این زنجیر بازگشتی و دارای توزیع مانا است.

ب. این زنجیر گذرا و توزیع مانا ندارد.

ج. این زنجیر بازگشتی بوده ولی توزیع مانا ندارد.

د. این زنجیر توزیع مانا دارد ولی گذرا است.

۱۳. شرط لازم برای وجود توزیع مانا در یک زنجیر آنست که زنجیر :

الف. تحویلناپذیر پوچ باشد. ب. تحویلناپذیر مثبت باشد.

ج. تحویلناپذیر و بازگشتی باشد. د. دارای حداقل یک حالت بازگشتی مثبت باشد.

۱۴. کدام یک از زنجیرهای زیر دوره‌ای با دوره ۲ هستند؟

الف. ارنفست ساده ب. قدم زدن تصادفی ساده

ج. تعدیل یافته ارنفست د. الف و ب

۱۵. اگر ماتریس احتمال انتقال ( $P$ ) زنجیری مارکف با فضای حالت  $M$  عضوی باشد. در کدام مورد زیر توزیع مانای آن،

یکنواخت گسسته خواهد بود؟ ( $P = (P_{xy})$ )

الف.  $P_{xy} = \frac{1}{M-1}$  ب.  $P_{xy} = \frac{1}{M}$

ج.  $P_{xy} = \frac{1}{M^p}$  د. اطلاعات کافی نیست.

نام درس: فرآیند تصادفی ۱  
رشته تحصیلی / کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد: ۱۱۱۷۰۲۹)  
ریاضی (محض و کاربردی: ۱۱۱۰۵۳)  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از ماشین حساب مجاز است.  
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

۱۶. اگر  $\{X_t, t \geq 0\}$  یک زنجیر مارکف زمان - پیوسته با فضای حالت  $E = \{0, 1, 2\}$ ،  $q_{xx+1} = 5$ ،  $q_{xx-1} = 4$  و

$q_{xx-2} = 3$  و بقیه  $q_{xy}$  ها صفر باشند جز  $q_{xx}$ . آنگاه احتمال آنکه زنجیر حداقل ۲ واحد زمانی در حالت ۱ توقف نموده و سپس به حالت ۲ تغییر مکان دهد، چیست؟

- الف.  $e^{-18}$       ب.  $\frac{9}{5}e^{-18}$       ج.  $\frac{5}{9}e^{-18}$       د.  $\frac{5}{9}$

۱۷. در سؤال شماره (۱۶) معادله پیشرو کولموگروف به ازای  $y = 0$  کدامست؟

- الف.  $-5P_{x1}(t) + 4P_{x0}(t) + 3P_{x2}(t)$   
ب.  $5P_{x0}(t) - 4P_{x1}(t) + 3P_{x2}(t)$   
ج.  $-5P_{x2}(t) + 4P_{x0}(t) + 3P_{x1}(t)$   
د.  $-5P_{x0}(t) + 4P_{x1}(t) + 3P_{x2}(t)$

۱۸. در زنجیر مارکف زمان - پیوسته‌ای با فضای حالت  $E = \{0, 1, 2\}$ ، توزیع مانای آن در رابطه  $y \neq 0$ ،  $\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(y)} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda}$  صادق است. توزیع مانای آن کدام است؟

- الف.  $(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})(\frac{\mu}{\lambda + \mu})^y$ ،  $y \geq 0$       ب.  $(\frac{\mu}{\lambda + \mu})(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^y$ ،  $y \geq 0$   
ج.  $(\frac{\mu}{\lambda + \mu})(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^y$ ،  $y \geq 1$       د. وجود ندارد

۱۹. هر فرآیند زایشی محض با نرخ ثابت یک فرآیند ..... است.

- الف. پواسن      ب. حرکت براونی      ج. قدم زدن تصادفی      د. شاخه‌ای  
۲۰. کدام فرآیند زیر یک فرآیند جهشی محض است؟  
الف. زاد و مرگ      ب. حرکت براونی      ج. الف و ب      د. هیچکدام

نام درس: فرآیند تصادفی ۱  
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد : ۱۱۱۷۰۲۹)  
ریاضی (محض و کاربردی : ۱۱۱۰۵۳)  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از: ماشین حساب  
مجاز است.

سؤالات تشریحی

۱. اگر  $X$  متغیری نامنفی و پیوسته و دارای ویژگی بیحافظگی باشد. ثابت کنید  $X$  دارای توزیع نمایی است. (۱/۵ نمره)
۲. اگر  $X$  متغیری تصادفی بر فضای نمونه ای  $S$  با تابع توزیع  $F_x$  و  $E$  پیشامدی از فضای نمونه ای  $S$  باشند. با معلوم فرض کردن  $P(E|X=x)$ ، اولاً: رابطه زیر را ثابت کنید:

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E|X=x) dF_x(x)$$

- ثانیاً: اگر  $X$  متغیرهای تصادفی بر فضای نمونه ای  $S$  با پارامتر ۱،  $y|X=x$  دارای توزیع پواسن با پارامترهای  $x$  باشند. توزیع  $y$  را تعیین نموده و واریانس  $y$  را حساب کنید. (۲ نمره)

۳. اگر  $\{X_n, n \geq 0\}$  زنجیری مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر باشد، مقدار  $f_{30}$  بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

۴. فرض کنید زنجیری دارای دو توزیع مانای متمایز مانند  $\Pi_1, \Pi_2$  دارد.

اولاً: ثابت کنید به ازای هر  $\alpha \in [0,1]$ ،  $\Pi_\alpha(x) = \alpha \Pi_1(x) + (1-\alpha) \Pi_2(x)$  یک توزیع مانا است.

ثانیاً: اگر  $\alpha \neq \alpha'$  آن گاه  $\Pi_\alpha \neq \Pi_{\alpha'}$ .

(۱/۵ نمره)

۵. اگر  $\{X_t, t \geq 0\}$  یک فرآیند مارکف زمان - پیوسته باشد، معادله پسروکولموگوروف را بیان و ثابت کنید. (۱/۵ نمره)

$$P_{xy}(t) = q_x e^{-q_x t} \int_0^t e^{-q_x s} \left( \sum_z Q_{xz} P_{zy}(s) \right) ds$$