نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۱۱_۱۱_۰۸۸)/ ریاضی (۱۱_۱۱_۰۴۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰

تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ٦٠ تشریحی: ٦٠
کد سری سوال: یک - ۱

۱.اگر P_1, P_2 دو افراز از $[a,b]$, $P_1 \subseteq P_2$ باشد، آنگاه

الف) $U(P_2, f, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha)$

ب) $L(P_2, f, \alpha) \leq L(P_1, f, \alpha)$

ج) P_1 از P_2 ظریفتر است.

د) $U(P_1, f, \alpha) \leq L(P_2, f, \alpha)$

۲.برای کدامیک از توابع زیر بر بازه ی $[0,1]$ داریم.........

الف) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ \frac{1}{n} & \left[x = \frac{m}{n} =, (m,n) = 1\right] \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \notin Q \\ 0 & x \in Q \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases}$

د) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \cap [0,1] \\ -1 & x \notin Q \cap [0,1] \end{cases}$

۳.(شرط ریمان) شرط لازم و کافی برای آنکه $f \in R(\alpha)$ آن است که:

الف) $\forall \varepsilon\ \exists P_\varepsilon\ \forall P\ (P_\varepsilon \subseteq P \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon)$

ب) $\forall \varepsilon\ \exists P_\varepsilon \forall P\ \ (P_\varepsilon \subseteq P \Rightarrow L(P, f, \alpha) - U(P, f, \alpha) < \varepsilon)$

ج) $\forall \varepsilon\ \ \exists P_\varepsilon\ \forall \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2\ \ (P_\varepsilon \subseteq \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \Rightarrow U(P_2, f, \alpha) - U(P_1, f, \alpha) < \varepsilon)$

د) $\forall \varepsilon\ \exists P_\varepsilon\ \ \forall \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2\ \ (P_\varepsilon \subseteq \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \Rightarrow L(P_2, f, \alpha) - U(P_1, f, \alpha) < \varepsilon)$

۴.اگر $f \in R(\alpha)$ روی $\mathrm{I}= [a,b]$ باشد، آنگاه کدام نتیجه گیری صحیح است؟

الف f بر I مشتقپذیر است.

ب f بر I از تغییر کراندار است.

ج f بر I کراندار است.

د f بر I پیوسته است.

نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۰۸۸_۱۱_۱۱)/ ریاضی (۰۴۱_۱۱_۱۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰
تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰
کد سری سوال: یک - ۱

۵.در مورد $\|\ \|_۲$ کدام گزاره صحیح است؟

الف اگر $f, g, h \in R(\alpha)$ بر $I=[a,b]$ آنگاه $\| f-h \|_۲ = \| f-g \|_۲ + \| g-h \|_۲$

ب اگر $f, g \in R(\alpha)$ بر $I=[a,b]$ آنگاه $\| f+g \|_۲ \geq \| f \|_۲ . \| g \|_۲$

ج اگر $f, g \in R(\alpha)$ بر $I=[a,b]$ آنگاه $\int_a^b |f\ g| d\alpha \geq \| f \|_۲ \| g \|_۲$

د اگر $\int_a^b f.d\alpha$ موجود باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ همواره یک تابع پیوسته $\varphi:[a,b] \to R$ وجود دارد به طوری که $\| f-\varphi \|_۲ \leq \varepsilon$

۶.با فرض $f \in R(\alpha)$, $(a \leq x \leq b)$, $F(x) = \int_a^x f d\alpha$، کدام گزاره صحیح است؟

الف اگر f در x_0 پیوسته و αدر x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است.

ب اگر f و αدر x_0 پیوسته باشد آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است.

ج اگر f در x_0مشتق پذیر و αدر x_0 پیوسته باشد آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است.

د اگر αدر x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است.

۷.کدامیک از انتگرالهای زیر به طور مطلق همگراست؟

الف $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ب $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} dx$

ج $\int_1^\infty \frac{dx}{2x\ log x} dx$ د $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$

۸.کدام انتگرال همگراست؟

الف $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x}$ ب $\int_1^\infty \left|\frac{sinx}{x}\right| dx$ ج $\int_1^\infty \frac{dx}{2x(\log x)^2}$ د $\int_1^\infty \frac{dx}{Ln\ x}$

۹.بر بازه ی $[a,b]$ کدام گزینه درست است؟

الف هر تابع کراندار با تغییر کراندار است.

ب هر تابع با تغییر کراندار دارای مشتق کراندار است.

ج هر تابع مشتق پذیر با تغییر کراندار است.

د هر تابع یکنوا، با تغییر کراندار است.

نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۰۸۸_۱۱_۱۱)/ ریاضی (۰۴۱_۱۱_۱۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰
تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ٦٠ تشریحی: ٦٠
کد سری سوال: یک - ۱

۱۰.کدام تابع بر $[0,1]$ با تغییر کراندار است؟

الف
$$f(x)=\begin{cases} x^2\ \cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ب
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\ \cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ج
$$f(x)=\begin{cases} x\ \mathrm{Sin}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

د
$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

۱۱. کدام عبارت صحیح است؟

الف هر تابع کراندار با تغییر کراندار است

ب هر تابع صعودی با تغییر کراندار است

ج هر تابع با تغییر کراندار ، تابع صعودی است

د هر تابع با تغییر کراندار تفاضل دو تابع یکنواست

۱۲.از همگرایی یکنواخت دنباله تابعی $\{f_n\}$ بر $[a,b]$ به تابع f کدام نتیجه لزوماً حاصل نمی گردد؟

الف انتگرال پذیری f_n ها بر I به f انتقال می یابد .

ب پیوستگی f_n ها به f انتقال می یابد .

ج مشتق پذیری f_n ها به f انتقال می یابد.

د کرانداری f_nها به f انتقال می یابد.

۱۳.اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت بر $I=[a,b]$ همگرا باشد و.................

الف دنباله $\{g_n\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ به طور یکنواخت بر I همگراست.

ب g بر I کراندار باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g$ به طور یکنواخت بر I همگراست.

ج به ازای هر $n\in N$ و هر $x\in I$، $g_n(x)\leq g_{n+1}(x)$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ به طور یکنواخت بر I همگراست.

د $\{g_n\}$ دنباله ای از توابع کراندار باشد انگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ به طور یکنواخت بر I همگراست.

نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۰۸۸_۱۱_۱۱)/ ریاضی (۰۴۱_۱۱_۱۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰

تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰
کد سری سوال: یک - ۱

۱۴.اگر $f(x)=|x|\ ,\ \forall x\in[-a,a]=I$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف یک دنباله از توابع خطی $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $L_n \xrightarrow{\text{یکنواخت بر } I} f$

ب یک دنباله از چند جمله ای ها مانند $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری $P_n \xrightarrow{\text{یکنواخت بر } I} f$

ج یک دنباله از توابع مشتق پذیر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $f_n \xrightarrow{\text{یکنواخت بر } I} f$

د یک دنباله از توابع کراندار $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $S_n \xrightarrow{\text{یکنواخت بر } I} f$

۱۵.اگر $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\, x^n\ ,\ g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\, x^n$ دو تابع تحلیلی بر بازه $I=(-R\ ,\ R)$ را نمایش دهند، آنگاه ضرایب C_n در بسط حاصل ضرب آنها به یک سری توانی روی I، $h(x)=f(x).g(x)$ از کدام رابطه بدست می آید؟

الف. $h(x)=\sum C_n x^n\ ,\ \ni\ C_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\, b_{n+i}$

ب $h(x)=\sum C_n x^n\ ,\ \ni\ C_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}a_i\, b_j$

ج $h(x)=\sum C_n x^n\ ,\ \ni\ C_n=\sum\limits_{i+j=n}a_i\, b_j$

د $h(x)=\sum C_n x^n\ ,\ \ni\ C_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{n-i}\, b_{n+i}$

۱۶.کدام گزینه صحیح نیست؟

الف شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ برابر ∞ است.

ب $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ کراندار و نزولی است.

ج $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ همگراست.

د $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

۱۷.کدام گزینه صحیح است؟

الف $(\alpha<0)\ \lim_{x\to\infty}x^{\alpha}\,e^{-x}=\infty$

ب $(\alpha>0)\ \lim_{x\to\infty}x^{-\alpha}\,lnx=0$

ج $(\alpha>0)\ \lim_{x\to\infty}x^{\alpha}\,e^{-x}=\infty$

د $(\alpha<0)\ \lim_{x\to\infty}x^{-\alpha}\,lnx=0$

نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۱۱_۱۱_۰۸۸)/ ریاضی (۱۱_۱۱_۰۴۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰
تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ٦۰ تشریحی: ٦۰
کد سری سوال: یک - ۱

۱۸. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ برابر است با:

الف $R=2$ ب $R=\infty$

ج $R=\frac{1}{2}$ د $R=1$

۱۹. اگر $E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\forall z\in\mathbb{C}$ آنگاه حاصل $E(i\pi)$ کدام است

الف ۱ ب ۱- ج i د $-i$

۲۰.اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر R باشد که در ان $0<R$ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ که در ان $y=\frac{x}{R}$ کدام است؟

الف R ب 1 ج ∞ د $\frac{1}{R}$

نام درس : آنالیزریاضی ۲
رشته تحصیلی/ کد درس: آمار(۱۱_۱۱_۰۸۸)/ ریاضی (۱۱_۱۱_۰۴۱)
آزمون: نیمسال دوم ۸۹-۹۰

تعداد سوالات : تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ٦٠ تشریحی: ٦٠
کد سری سوال: یک - ۱

سوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره است

۱.الف)ثابت کنید اگر تابع f بر بازه ی $[a,b]$ پیوسته α بر $[a,b]$ صعودی باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$

ب) انتگرال زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\int_{0}^{4}[x^2+[x]]\,d[[2x]]$$

۲. الف)اگر تابع f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد،آنگاه f بر $[a,b]$ کراندار است.

ب)اگر $f(x)=2x^3-3x^2$ ، مطلوبست محاسبه $v(f)$ بر بازه $[-1\ ,\ 2]$

۳. قضیه دینی را ثابت کنید:فرض کنید $\{f_n\}$ بر فضای متریک و فشرده X به طور نقطه وار به تابع f همگرا باشد. همچنین هر f, f_n توابعی پیوسته بر X باشند، و برای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}$ نزولی باشد. ثابت کنید $f_n \xrightarrow{\text{یکنواخت بر } X} f$

۴.به کمک روشهای انتگراگیری ، تساوی زیر بین دو انتگرال ناسره را ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}.dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}.dx$$

۵.اگر $E(x)=\sum \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in R$ ثابت کنید

الف) $E'(x)=E(x)\ ,\ \forall x \in R$

ب) تابع اکیداً صعودی بر R $E(x)=R$