

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۱ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۱- کدامیک از دستگاههای زیر خطی می باشند؟

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \sin t \\ x_2' = x_1^2 + x_2 \end{cases} \quad .1$$

$$\begin{cases} x_1' = t^x x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 x_2 \end{cases} \quad .2$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos t + x_2 / g t \\ x_2' = t x_1 + \frac{1}{t} x_2 \end{cases} \quad .3$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{x_1}{x_2} \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad .4$$

۲- کدامیک از فضاهاهای زیر خطی نرم‌دار کامل است؟

۱. هیلبرت ۲. بلانخ ۳. اقلیدسی ۴. کوشی

۳- این قضیه که: ((اگر F خانواده ای یکسان پیوسته از توابع کرانه باشد که در هر نقطه بازه ای چون I یکسان پیوسته است. در این صورت هر دنباله $\{f_n\}$ در F زیر دنباله ای دارد که روی هر زیر بازه فشرده I یکنواخت همگراست.)) چه نام دارد؟

۱. پیکار - لیندلف ۲. لیشیتز ۳. کوشی - پانتو ۴. جی آسکولی

۴- اگر تابع u روی $[0, t]$ پیوسته و نامنفی باشد و در نامساوی

$$u(t) \leq (t^2 + t^3) + \int_0^t (4t^3 + 5t^2)u(t)dt$$

$$u(t) \leq (t^2 + t^3) + e^{4t^3 + 5t^2} \quad .1$$

$$u(t) \leq (t^2 + t^3) + e^{4t^3 + 5t^2} \quad .2$$

$$u(t) \leq (t^2 + t^3)e^{4t^3 + 5t^2} \quad .3$$

$$u(t) \leq (2t + 3t^2)e^{4t^3 + 5t^2} \quad .4$$

۵- اگر معادله دیفرانسیل $x''' + 7x'' + 6x' = 0$ را به صورت $x' = Ax$ بنویسیم؛ A کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad .1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad .2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -2 \end{bmatrix} \quad .3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad .4$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۱ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۶- شرایط هوروتیز را در مورد چند جمله ای $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ به چه صورت می توان تحویل نمود؟

$$a_1, a_3 \geq 0, a_2 \leq 0 \quad ۱. \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_2^2 a_4 > 0 \quad ۲.$$

$$a_1, a_2 \geq 0, a_3 \leq 0 \quad ۴. \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_2^2 a_4 < 0 \quad ۳.$$

۷- کدامیک از چند جمله ای های زیر پایدار می باشند؟

$$L(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 2 \quad ۲. \quad L(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad ۱.$$

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + 3 \quad ۴. \quad L(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5 \quad ۳.$$

۸- با فرض منفی بودن تمام قسمت های حقیقی ویژه -مقادیر A ؛ وقتی $t \rightarrow \infty$ جوابهای $y' = Ay + f(t, y)$ به صفر میل می کنند مشروط بر اینکه:

$$\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{و} \quad \|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| \quad ۲. \quad \alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{و} \quad \|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| \quad ۱.$$

$$\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{و} \quad \|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| \quad ۴. \quad \alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{و} \quad \|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| \quad ۳.$$

۹- اگر تمام جوابهای دستگاه $x' = Ax$ روی $[0, \infty)$ کراندار باشند، در چه صورت تمام جوابهای دستگاه

$x' = (A + B(t))x$ (ماتریس $B(t)$ $n \times n$ پیوسته و A ماتریس $n \times n$ ثابت می باشند) روی

$[0, +\infty)$ کراندار می باشد؟

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0 \quad ۱. \quad \int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty \quad ۲.$$

$$A \text{ ماتریس منفرد باشد.} \quad ۳. \quad B(t) \text{ ماتریس ثابت نامنفرد باشد} \quad ۴.$$

۱۰- اگر قسمت حقیقی هر یک از ویژه -مقادیر ماتریس ثابت $A = (a_{ij})$ منفی باشد، آنگاه تمام جوابهای معادله

$x' = Ax$ چه نوع می باشند؟

۱. مجانباً پایدار ۲. کراندار ۳. پایدار ۴. قویاً پایدار

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۱)، ریاضیات و کاربردها (۱۱۱۴۳۳)

۱۱- نقطه بحرانی $(0, 0)$ دستگاه
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$
 چه نوع است؟

۱. پایدار ۲. مجانباً پایدار ۳. زینی ۴. ناپایدار

۱۲- کدامیک از توابع زیر وابسته خطی می باشند؟

۱. $e^t \cos t, e^t \sin t$ ۲. $\sin 5t, \sin 7t$ ۳. $e^{2t}, e^{3t}, e^{5t+7t}$ ۴. $\ln t, t^2 + t^3$

۱۳- فرض می کنیم $a(t)$ روی $[0, +\infty)$ تابعی پیوسته - مشتقپذیر باشد، در اینصورت تحت چه شرطی تمام جوابهای $u'' + a(t)u = 0$ روی $[0, +\infty)$ کراندارند؟

۱. $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ بطور یکنواخت ۲. $\int_0^{+\infty} a(t)dt < \infty$ ۳. $\int_0^{+\infty} a(t)dt < 1$ ۴. $\int_0^{+\infty} a(t)dt > 1$

۱۴- اگر توابع دلخواه $g(t)$ و $h(t)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه کدام رابطه برقرار است؟

۱. $\int_a^b g(s)h(s)ds \leq \left(\int_a^b g^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b h^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}$

۲. $\int_a^b f(s)g(s)ds \geq \left(\int_a^b g^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b h^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}$

۳. $\int_a^b g(s)h(s)ds = \left(\int_a^b g(s)ds \right) \left(\int_a^b h(s)ds \right)$

۴. $\int_a^b g(s)h(s)ds \leq \left(\int_a^b g(s)ds \right) \left(\int_a^b h(s)ds \right)$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳)

۱۵- اگر $\|u\|$ و $\|u''\|$ کراندار باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. $u \in L^p[0, +\infty]$ ۲. $u'' \in L^p[0, +\infty]$

۳. $u' \in L^p[0, +\infty]$ ۴. $\|u'\|$ کراندار است

۱۶- تابع $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$ چه نوع است؟

۱. معین مثبت ۲. نیمه معین مثبت ۳. معین منفی ۴. نیمه معین منفی

۱۷- تابع $V(t, x_1, x_2) = x_1^2(1 + \sin^2 t) + x_2^2(1 + \cos^2 t)$ چه نوع است؟

۱. نیمه معین مثبت ۲. معین مثبت ۳. کاهنده ۴. معین مثبت و کاهنده

۱۸- در مورد معادله $u'' + \frac{1}{t^2}u = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. یک معادله غیر نوسانی است ۲. یک معادله نوسانی است ۳. تمام جوابهای آن کراندار می باشند ۴. تمام جوابهای آن بی کران می باشند

۱۹- اگر $u = \varphi(t)$ جوابی از معادله $u' + p(t)u + q(t)u^2 = r(t)$ باشد، جواب دیگری به چه صورت است؟

۱. $u = e^{\varphi(t)}$ ۲. $u = \varphi(t) - \frac{1}{t}$

۳. $u = t\varphi(t)$ ۴. $u = \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)}$

۲۰- رونسکی ۳ تابع $e^{5t}, t, 1$ کدام است؟

۱. e^{5t} ۲. $5t$ ۳. te^{5t} ۴. $25e^{5t}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۱ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- فرض کنید $0 \leq c \leq 1$ و توابعی نامنفی و پیوسته روی $[t_0, t_0 + a]$ باشند، اگر

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

آنگاه ثابت کنید

$$u(t) \leq c \exp \left[\int_{t_0}^t v(s)ds \right] \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

۱.۴۰ نمره

۲- ثابت کنید یک شرط لازم و کافی برای اینکه جواب ماتریس $\phi(t)$ از $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ یک ماتریس

اصلی آن باشد؛ آن است که $\forall t \in (r_1, r_2) \quad \det \phi(t) \neq 0$

۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید تمام جوابهای دستگاه $x' = A(t)x$ پایدارند اگر و تنها اگر کراندار باشند.

($A(t)$ ماتریس $n \times n$ و پیوسته بر $(r_1, +\infty)$ و یک $n - بردار$ است)

۱.۴۰ نمره

۴- اگر $\varepsilon > 0$ و به ازای هر t $a(t) \geq \frac{1+\varepsilon}{4t^3}$ آنگاه نشان دهید که تمام جوابهای نابديهی معادله

$$u'' + a(t)u = 0$$

۱.۴۰ نمره

۵- اگر تابع معین مثبت اسکالری چون $V(x)$ وجود داشته باشد که روی S_p داشته باشیم $V^*(x) \leq 0$

آنگاه ثابت کنید؛ جواب صفر $x' = f(x)$ پایدار است.

شماره سوال	الف	ب	ج	د	پاسخ صحيح	وضعيت كليد
١			X		ج	عادي
٢			X		ب	عادي
٣			X		د	عادي
٤			X		ب	عادي
٥			X		الف	عادي
٦			X		ب	عادي
٧			X		ج	عادي
٨			X		د	عادي
٩			X		ب	عادي
١٠			X		الف	عادي
١١			X		د	عادي
١٢			X		ج	عادي
١٣			X		الف	عادي
١٤			X		الف	عادي
١٥			X		د	عادي
١٦			X		ب	عادي
١٧			X		د	عادي
١٨			X		الف	عادي
١٩			X		د	عادي
٢٠			X		د	عادي