

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع $P(X = x) = \left(\frac{1}{4}\right)^k, k = 1, 2, 3, \dots$ و با تابع مولد احتمال $\phi(s)$ باشد مقدار $\phi'(1)$ کدامست؟

۵ . ۴

۹ . ۳

۸ . ۲

۲- اگر x یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x) = 5e^{-5x}, x > 0$ و $y | X = x$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $3x$ باشد $E(Y^2)$ چیست؟

۱۲ . ۴

۳۳ . ۳
۲۵

۲۰ . ۲
۲۵

۲۴ . ۱
۲۵

۳- تاس سالمی را متوالیا پرتاب می کنیم تا ۶ بیاید. در صورت مشاهده k ($k = 1, 2, \dots, 5$)، k دقیقه صبر می کنیم و سپس دوباره تاس را پرتاب می کنیم. اگر T مدت زمان انتظار تا آمدن ۶ باشد. $E(T)$ چیست؟

۱۵ . ۴

۱۶ . ۳

۱۲ . ۲

۱۰ . ۱

۴- اگر X_1 دارای توزیع نمایی با پارامتر θ و X_2, \dots, X_n دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشند. با فرض مستقل بودن X_1, \dots, X_n چقدر احتمال دارد که X_1 کوچکترین مشاهده باشد؟

۳ . ۴
 $n+1$

θ . ۳
 $n+1$

θ . ۲
 n

$(n+2)\theta$. ۱

۵- اگر X_1 دارای توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ و $X_2 | X_1 = x_1$ دارای توزیع یکنواخت بر $(x_1, 0)$ و به همین ترتیب $X_{n+1} | X_n = x_n$ دارای توزیع یکنواخت بر $(x_n, 0)$ باشند مقدار $Var(X_2)$ چیست؟

۸۷ . ۴

۳۴ . ۳

۱۷۵ . ۲
۲۰۷۳۶

۱۷۵ . ۱
۲۰۷

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

۶- اگر $N(t)$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λ و $N(a, b) = N(b) - N(a)$ باشد،
 $P(N(2, 3) = 6 | N(0, 4) = 10)$ کدام است؟

$$1. \quad P(N(1) = 6, N(3) = 4) = \frac{P(N(1) = 6 | N(4) = 10)}{P(N(4) = 10)}$$

$$2. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$3. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$4. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

۷- عددی در فاصله $(0, 1)$ انتخاب می کنیم و آن را X می نامیم. اگر $X = x$ باشد سکه ای که احتمال شیر آمدنش X است را n بار پرتاب می کنیم. توزیع تعداد شیرها چیست؟

۱. یکنواخت پیوسته ۲. هندسی ۳. پواسن ۴. یکنواخت گسسته

۸- در سوال شماره ۷ با فرض $n = 5$ واریانس تعداد شیرها چیست؟

$$1. \quad \frac{2}{5}$$

$$2. \quad \frac{35}{12}$$

$$3. \quad \frac{195}{4}$$

۹- اگر A_1, A_2, \dots یک دنباله از پیشامدهای نزولی و $P(A_k) = \frac{1}{2^n} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{k}{n}\right)}$ باشند، مقدار $P(\bigcup A_i)$ چیست؟

$$1. \quad 1$$

$$2. \quad \frac{1}{e}$$

$$3. \quad \frac{1}{e}$$

$$4. \quad 1 - \frac{1}{e}$$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

۱۰- اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی باشد طوریکه

$$P(X > k+1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^p, k = 0, 1, 2, \dots$$

چیز است $E(X)$ ؟

۴. $\frac{\pi^p}{6}$

۳. $\frac{\pi}{6}$

۲. $\frac{\pi^p}{3}$

۱. $\frac{\pi}{3}$

۱۱- اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی و $P(X > k+1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^p$ باشد $E(X)$ چیست؟

۴. $\frac{\pi}{6}$

۳. $\frac{\pi}{3}$

۲. $\frac{\pi^p}{3}$

۱. $\frac{\pi^p}{6}$

۱۲- توزیع ایستا در یک زنجیر زاد و مرگ با فرض $q_x = q > 0$ و $p_x = p > 0$ چه نام دارد؟

۴. توزیع کای اسکور

۳. توزیع نرمال

۲. توزیع پواسون

۱. توزیع هندسی

۱۳- در زنجیر ارنفست ساده با ۵ مهره اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته بر فضای حالت باشد آنگاه $E(X_1)$ چیست؟

۴. ۳۷

۳. ۲۴

۲. ۱۲

۱. ۲/۵

۱۴- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای حالت $\{0, 1\}$ و ماتریس احتمال انتقال $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ باشد با فرض $\pi_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ مطلوبست $P(X_{p_0} = 1)$.

۴. $\frac{4}{7}$

۳. $\frac{4}{7} + \left(\frac{5}{12} \right)^{p_0}$

۲. $\frac{4}{7} - \left(\frac{5}{12} \right)^{p_0}$

۱. $\frac{4}{7} - \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12} \right)^{p_0}$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

۱۵- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد آن گاه:

۰۱ زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی است

۰۲ زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی پوچ است

۰۳ زنجیر تحویل ناپذیر گذرا است

۰۴ موارد ۱ و ۲

۱۶- $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ مقدار $E_0(T_0)$ چیست؟
در سوال شماره ۱۴ با فرض

۰۱ ۱۲

۰۲ ۱۰

۰۳ $\frac{17}{9}$

۱۷- اگر X و Y حالتی از یک زنجیر مارکف $\{X_n, n \geq 0\}$ و $P_{xy}^{(n)} = \frac{1}{4(n+1)!}$ باشند. مقدار $E_x(N(y))$ برابر است با:

۰۱ e

۰۲ $\frac{e}{4}$

۰۳ $\frac{e}{25}$

۰۴ $\frac{1}{25}$

۱۸- اگر Y حالتی گذرا باشد آن گاه کدام مورد زیر درست است؟

۰۱ $P(N(Y) = \infty) = 1$

۰۲ $E_x(N(Y)) = \frac{f_{xy}}{1-f_{yy}}$

۰۳ $E_x(N(Y)) = \infty$

۰۴ موارد ۱ و ۲

۱۹- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف همگن و Y حالت گذرا باشند. $f_{yy} = \frac{12}{25}$ ، $f_{xy}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ، $n \geq 1$ اگر فرآیند از حالت X شروع به فعالیت نموده باشد متوسط تعداد دفعات برخورد به حالت Y چیست؟

۰۱ ۱۵

۰۲ $\frac{12}{25}$

۰۳ نامشخص

۰۴ $\frac{100}{127}$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

۲۰- گزاره صحیح کدام است؟

۱. اگر $x \rightarrow y$ باشد آنگاه هر دو حالت X و Y یا گذریند و یا بازگشتی
۲. تمام حالت‌های یک زنجیر مارکف با فضای حالت‌های متناهی بازگشتی است
۳. رابطه در دسترس بودن یک رابطه هم ارزی است
۴. هر سه مورد

۲۱- گزاره صحیح کدام است؟

۱. هر زنجیر مارکف با فضای حالت متناهی فقط یک حالت بازگشتی دارد
۲. شرط لازم و کافی برای آنکه حالت صفر در زنجیر قدم زدن تصادفی بازگشتی باشد آن است که $p = \frac{1}{3}$.
۳. اگر دو حالت در دسترس همدیگر باشند آن گاه هر دو از یک چسبند.
۴. هر سه مورد

۲۲- در مسئله ورشکستگی قمارباز با سرمایه مجموع ۵ حالت‌های گذرای زنجیر چیست؟

۱. $\{1, 2\}$
۲. $\{0, 5\}$
۳. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
۴. $\{1, 2, 3, 4\}$

۲۳- در مسئله ورشکستگی قمارباز با $a = 2, b = 3$ و $p = \frac{1}{4}$ احتمال ورشکستگی شخص A چقدر است؟

۱. $0/12$
۲. $0/54$
۳. $\frac{1}{10}$
۴. $\frac{90}{91}$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

-۲۴

| | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{3}$ | ۰ | ۰ | $\frac{2}{3}$ |
| ۰ | ۰ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| ۰ | ۰ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت $\{0, 1, 2, 3\}$ و ماتریس احتمال انتقال

باشد $E_0(N(1))$ چیست؟

۱۲ .۴

$\frac{14}{5}$.۳

$\frac{1}{5}$.۲

$\frac{3}{5}$.۱

-۲۵ در سوال شماره ۲۳ اگر A بهتر از B بازی کند و $p = \frac{3}{5}$ باشد $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_a$ چیست؟ احتمال

ورشکستگی شخص A است)

۰ .۴

۱ .۳

$\frac{5}{9}$.۲

$\frac{4}{9}$.۱

-۲۶ اگر تعداد نوزادان هر فرد ξ_i در فرآیند شاخه ای دارای توزیع $p(\xi_i = k) = v^k \left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ باشد احتمال

انقراض نسل چیست؟

۰ .۴ نمی توان حساب کرد

$\frac{1}{7}$.۳

$\frac{1}{8}$.۲

۱ .۱ حتمی است

-۲۷ کدام مورد درباره زنجیر زاد و مرگ با $p_0 = 1, p_x = 0, r_x = 0, q_x \equiv p, p_x \equiv p$ درست است؟

۲ . همواره تحویل ناپذیر بازگشتی است

۱ . همواره تحویل ناپذیر گذرا است

۴ . با شرط $q \geq p$ تحویل ناپذیر گذرا است

۳ . با شرط $q \geq p$ تحویل ناپذیر بازگشتی است

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

۲۸- در سوال شماره ۲۷، اگر $p = \frac{1}{4}$ باشد واریانس توزیع مانای آن برابر است با:

۱. ۴
 $\frac{1}{8}$

۳. ۳
 $\frac{3}{7}$

۲. ۲
 $\frac{1}{16}$

۱. ۱
 $\frac{1}{20}$

۲۹- در زنجیر مارکوف با فضای حالت $\{0, 1\}$ و با $f_{00}^{(1)} = \frac{1}{3}, f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}$ مقدار $f_{00}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}, k \geq 3$ چیست؟

۴. ۱۲

۳. ۱
 $\frac{1}{19}$

۲. ۱۷
 $\frac{1}{9}$

۱. ۱
 $\frac{1}{9}$

۳۰- چه نوع زنجیرهایی دارای توزیع مانایند؟

۲. تحویل ناپذیر و بازگشتی پوچ

۱. تحویل ناپذیر و گذرا

۴. موارد ۲ و ۳

۳. تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) ۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

سوالات تشریحی

- ۱- یک جسم رادیواکتیو، ذراتی را با نرخ λ ذره در دقیقه منتشر می کند. اگر N_i تعداد ذرات منتشر شده در فاصله ای به طول t دقیقه باشد و هر ذره با احتمال ثابت p ثبت شود توزیع تعداد ذرات ثبت شده را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۲- اگر N متغیری تصادفی با توزیع پواسن با پارامتر λ و X_0, X_1, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توابع هندسی با پارامتر p باشد. بشرط استقلال N از X ها تابع مولد احتمال $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ را یافته سپس به کمک آن میانگین Y را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده در حالت $p=1$ مقدار $E_0(N)$ بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۴- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف باشد برای هر X و Y از فضای حالتها و هر $n \geq 1$ روابط زیر را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۵- در زنجیر زاد و مرگ با فضای حالت $\{0, 1, 2, \dots\}$ و با احتمالات تغییر وضعیت $p_{xx+1} = p_x, p_{xx-1} = q_x, p_{xx} = r_x, x > 0$ شرط وجود توزیع ماننا بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۶- در زنجیرهای مارکف زمان - پیوسته معادله پسر و کولموگوروف را بیان و آن را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۷- در زنجیر مارکف زمان پیوسته با فضای حالت $\{0, 1, 2, \dots\}$ و برای $x \neq y, x \neq 0$ داشته باشیم. ۱۰۰ نمره
اولاً: معادله پیشرو کولموگوروف را یافته و با استفاده از آن توزیع مانای آن را بیابید.
 $q_{xx+1} = \lambda, q_{x0} = \mu$

| شماره سوال | الف | ب | ج | د | پاسخ صحيح | وضعيت كليد |
|------------|-----|---|---|---|-----------|------------|
| ۱ | | X | | | الف | عادي |
| ۲ | | X | | | ج | عادي |
| ۳ | | X | | | د | عادي |
| ۴ | | X | | | د | عادي |
| ۵ | | | X | | ب | عادي |
| ۶ | X | | | | الف | عادي |
| ۷ | | | | X | د | عادي |
| ۸ | | | X | | ب | عادي |
| ۹ | | X | | | الف | عادي |
| ۱۰ | | | | X | د | عادي |
| ۱۱ | | X | | | الف | عادي |
| ۱۲ | | | X | | الف | عادي |
| ۱۳ | | X | | | الف | عادي |
| ۱۴ | | X | | | الف | عادي |
| ۱۵ | X | | | | الف | عادي |
| ۱۶ | X | | | | ج | عادي |
| ۱۷ | X | | | | ب | عادي |
| ۱۸ | | | | X | ب | عادي |
| ۱۹ | | | | X | د | عادي |
| ۲۰ | | | X | | ج | عادي |
| ۲۱ | | | X | | ج | عادي |
| ۲۲ | | | | X | د | عادي |
| ۲۳ | | | | X | د | عادي |
| ۲۴ | | | | X | الف | عادي |
| ۲۵ | | X | | | الف | عادي |
| ۲۶ | X | | | | ج | عادي |
| ۲۷ | | | X | | د | عادي |
| ۲۸ | | X | | | ب | عادي |
| ۲۹ | | X | | | ب | عادي |
| ۳۰ | | | X | | ج | عادي |