

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۱- فرض کنید  $V$  و  $W$  دو فضای برداری نرمال و  $T$  یک تبدیل خطی از  $V$  به  $W$  باشد. آنگاه:

۱.  $T$  در صفر پیوسته است.

۲.  $T$  در هر نقطه از  $V$  پیوسته است.

۳.  $T$  در صفر پیوسته است اگر و فقط اگر در هر نقطه از  $V$  پیوسته باشد.

۴. تبدیل خطی  $T$  کراندار است.

۲-  $L(V, W)$  فضای تبدیلات خطی از  $V$  به  $W$  است اگر  $T \in L(V, W)$  در این صورت

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$$

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

۴. هر سه مورد صحیح است

$$\|Tx\| \leq \|T\| \text{ برای } \|x\| \leq 1$$

۳- اگر  $T \in L(V)$  که  $V$  فضایی برداری و نرمال است کدام گزینه غلط است؟

۱.  $T$  کراندار است اگر و فقط اگر  $T$  پیوسته باشد.

۲.  $T$  کراندار یعنی  $M \geq 0$  موجود است بطوریکه  $\|T(x)\| \leq M$  برای هر  $x \in V$

۳.  $T$  کراندار است اگر و فقط اگر  $T$  در صفر پیوسته باشد.

۴. مجموعه عملگرهای وارون پذیر روی  $V$  زیر مجموعه بازی از  $V$  است

۴- فرض کنید  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه،  $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$  تعریف شود کدام گزینه غلط است؟

۲. ماتریس جاکوبی  $f$  در هر نقطه موجود است

۱.  $f$  تابعی مشتق پذیر بر  $\mathbb{R}^2$  است.

۴. ژاکوبین  $f$  در هر نقطه مخالف صفر است.

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۵- کدام گزینه صحیح است؟

۱.  $f: R \rightarrow R$  بر  $R$  مشتق پذیر است لذا برای هر  $a$  و  $b$  نقطه ای مانند  $z \in [a, b]$  موجود است بطوریکه:  
$$f(b) - f(a) = f(z)(b - a)$$

۲.  $f: R^n \rightarrow R^n$  بر  $R^n$  مشتق پذیر است بطوریکه  $\|Df(x)\| \leq M$  به ازای هر  $x \in R^n$  انگاه  
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

۳.  $f: R^n \rightarrow R^m$  بر  $R^n$  مشتق پذیر است و اگر  $\|Df(a)\| \leq M$  برای هر  $a \in R^n$  انگاه  
$$|f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$$

۴. هر سه مورد فوق صحیح است

۶- تابع  $f: R^2 \rightarrow R^2$  به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^3}{x_1^4 - x_2^6} & \text{اگر } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

۱. تابع  $f$  در  $(0, 0)$  پیوسته است.

۲. مشتق سویی تابع در  $(0, 0)$  برای هر بردار واحد  $u$  برابر صفر است.

۳. تابع  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر است.

۴. تابع  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر است ولی در امتداد بعضی بردارهای واحد در  $(0, 0)$  مشتق سویی ندارد.

۷- اگر  $X$  یک فضای متریک کامل و  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت انقباض باشد انگاه

۱. به ازای هر  $x \in X$ ،  $f(x) \neq x$

۲. به ازای  $0 < \alpha < 1$ ،  $d(x, y) \leq \alpha d(f(x), f(y))$

۳. تابع دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

۴. تابع پیوسته نیست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۸- بنا بر قضیه تابع معکوس داریم:

۱. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر  $f$  در یک همسایگی از هر نقطه  $x$  متعلق به قلمرو خود معکوس پذیر است
۲. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر در یک همسایگی از هر نقطه  $x$  متعلق به قلمرو خود که  $f'(x) \neq 0$  معکوس پذیر است.
۳. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر  $f$  که  $f'(x) \neq 0$  (برای هر  $x$  واقع در دامنه  $f$ ) معکوس پذیر است.
۴. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر وارون پذیر است.

۹- کدام گزینه غلط است؟

۱. هر گاه  $f$  یک نگاشت از  $C^1$  از  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}^n$  و  $f'(x)$  به ازای هر  $x \in D$  وارون پذیر باشد  $f$  نگاشتی باز است
  ۲. بنابر قضیه رتبه رفتار یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر در مجاورت نقطه  $x$  از قلمرو خود با رفتار تبدیل خطی  $f'(x)$  شبیه است
  ۳. هر گاه  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  تابعی مشتق پذیر باشد و برای هر  $x \in \mathbb{R}^n$   $f'(x) \neq 0$  باشد آنگاه  $f$  تابعی وارون پذیر است
  ۴. هر گاه  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه  $f$  لزوماً تابعی وارون پذیر نیست
- ۱۰- اگر  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت  $f(x, y, z) = e^x + y^2 + z^2$  آنگاه  $Df(2, 0, 1)$  کدام است؟
۱.  $(e^2, 0, 2)$
  ۲.  $e^2 + 2$
  ۳.  $(e^2, 0, 2)$

۱۱- فرض کنید  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  به صورت زیر باشد:

$$f(x, y) = 0, \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ و در بازه } f(x, y) = 1, \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ در این صورت:}$$

۱.  $f$  انتگرال پذیر نیست
۲.  $f$  انتگرال پذیر است و  $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = \frac{1}{2}$
۳.  $f$  انتگرال پذیر است و  $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$
۴. هیچکدام

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۱۲- کدام گزینه غلط است؟

۰.۱ هر مجموعه متناهی در  $R^n$  دارای اندازه صفر است

۰.۲ اگر قدر مجموعه  $A \subset R^n$  صفر باشد، اندازه  $A$  هم صفر است

۰.۳ اگر  $A$  فشرد و با اندازه صفر باشد، قدر  $A$  هم صفر است

۰.۴ هر مجموعه با اندازه صفر دارای قدر صفر است

۱۳- اگر  $V$  یک فضای برداری باشد در این صورت:

۰.۱  $V^*$  فضای ۱- تانسورها است

۰.۲ اگر  $V = R^k$  باشد ضرب نقطه ای یک ۱- تانسور است

۰.۳ اگر  $V = R^k$  باشد ضرب نقطه ای یک ۲- تانسور است

۰.۴ موارد ۱ و ۳

۱۴- اگر  $V$  یک فضای برداری باشد و  $T$  یک  $P$ - تانسور متناوب باشد آنگاه:

۰.۲  $\text{Alt}(T) = T$

۰.۱  $\text{Alt}(T) = 0$

۰.۴  $\text{Alt}(T \otimes T) = T \otimes T$

۰.۳  $T \otimes T$  متناوب است.

۱۵- در صورتی که:  $dW = \omega_{X_1} dX_1 \wedge dX_3 + \epsilon_{X_2} dX_2 \wedge dX_3$  باشد داریم:

۰.۲  $W = \omega_{X_1} dX_1 \wedge dX_3 + \epsilon_{X_2} dX_2 \wedge dX_3$

۰.۱  $W$  یک فرم ۲-بعدی اساسی است.

۰.۴  $dW = \epsilon_{X_2} dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3$

۰.۳  $dW = 0$

۱۶- اگر  $W$  یک  $P$ - فرم هموار روی زیر مجموعه  $R^k$  باشد کدام گزینه غلط است؟

۰.۲  $dW$  یک  $p-1$  فرم است.

۰.۱  $ddW = 0$

۰.۴ اگر  $k \leq p$  آنگاه  $dW = 0$

۰.۳  $dW$  یک  $p+1$  فرم است.

۱۷- اگر  $Q^k$  یک سادک  $k$ - بعدی باشد آنگاه:

۰.۲  $Q^2$  دارای دو راس و دو وجه است.

۰.۱  $Q^0$  شامل یک نقطه و یک راس است.

۰.۴  $Q^1$  شامل ۱ راس و یک نقطه است.

۰.۳  $Q^3$  شامل سه راس و سه وجه است.

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۱۸- فرض کنید  $W$  یک  $k$ -فرم در مجموعه باز  $E \subset \mathbb{R}^n$  باشد کدام گزینه غلط است؟

۱. هرگاه  $dW = 0$  باشد  $W$  را یک فرم کامل نامیم.
۲. اگر  $W$  یک فرم کامل باشد آنگاه  $dW = 0$ .
۳. اگر  $W$  یک  $K$ -فرم بسته در  $E$  باشد انتگرال آن روی زنجیرهای  $K$  بعدی که مرز زنجیرهای  $k+1$  بدی در  $E$  اند صفر است.
۴. اگر  $dW = 0$  آنگاه  $W$  را یک فرم بسته می نامند.

۱۹- فرض کنید  $T$  و  $W$  دو فضای برداری با ابعاد  $m$  و  $n$  باشند و  $T$  یک تبدیل خطی از  $V$  به  $W$  باشد آنگاه

۱. ماتریس نمایش تبدیل خطی  $T$  یک ماتریس  $n \times m$  است.
۲. ماتریس نمایش تبدیل خطی  $T$  یک ماتریس  $m \times n$  است.
۳. مشتق تبدیل خطی  $T$  در هر نقطه ثابت است.
۴. ماتریس نمایش تبدیل خطی  $T$  وارون دارد.

۲۰- هرگاه  $\|\cdot\|_p$ ،  $\|\cdot\|_1$  دو نرم معادل روی فضای برداری  $V$  باشند کدام گزینه غلط است؟

۱. نگاشت همانی از  $(V, \|\cdot\|_1)$  به  $(V, \|\cdot\|_p)$  همیو مورفیسم است.
۲. مفاهیم مجموعه باز-بسته-فشرده-همبند نسبت به متریک القایی از این دو نرم یکی است.
۳. چون دو نرم معادلند فضای  $V$  متناهی البعد است.
۴. اگر بعد  $V$  متناهی باشد تمام نرمها روی آن معادلند.

### سوالات تشریحی

نمره ۱.۴۰

۱- اگر  $V$  یک فضای برداری نرم دار و  $L(V)$  فضای تبدیلات خطی کراندار روی  $V$  باشد نشان دهید مجموعه تمام عملگرهای وارون پذیر روی  $V$  مجموعه ای باز از  $L(V)$  است.

نمره ۱.۴۰

۲- فرض کنید تابع  $f$  مجموعه باز و محدب  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  را به توی  $\mathbb{R}^m$  بنگارد،  $f$  مشتق پذیر باشد و برای هر  $x \in D$  داریم  $\|Df(x)\| \leq M$  در این صورت به ازای هر  $a, b \in D$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$$

نمره ۱.۴۰

۳- قضیه افراز واحد را بیان و اثبات کنید

نمره ۱.۴۰

۴- مجموعه ای با اندازه صفر معرفی کنید که دارای قدر صفر نباشد و ادعای خود را اثبات کنید.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۵- لم پوانکاره را در خصوص ارائه شرط کافی برای فرمهای بسته که آنها را به فرمهای کامل تبدیل گرداند بیان و اثبات کنید.

www.Sanjesh3.com

شماره سوال	الف	ب	ج	د	پاسخ صحيح	وضعيت كليد
١		X			ج	عادي
٢		X			د	عادي
٣		X			ب	عادي
٤	X				د	عادي
٥		X			د	عادي
٦				X	ب	عادي
٧			X		ج	عادي
٨		X			ب	عادي
٩		X			ج	عادي
١٠		X			ج	عادي
١١		X			ب	عادي
١٢				X	د	عادي
١٣			X		د	عادي
١٤	X				ب	عادي
١٥			X		د	عادي
١٦				X	ب	عادي
١٧		X			الف	عادي
١٨	X				الف	عادي
١٩		X			الف	عادي
٢٠		X			ج	عادي