

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤال: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

ماشین حساب مجاز است.

جدول آماری لازم نیست.

فرمول‌های لازم در انتهای سوالات داده شده است.

۱. با توجه به این نکته که توزیع خی دو با پارامتر $v=2$ همان توزیع نمایی با میانگین ۲ است و بدون استفاده از جدول توزیع

خی دو، مقدار $\chi^2_{0.05;2}$ کدام است؟

الف. $-\frac{1}{2} \ln 0.05$ ب. $-\frac{1}{2} \ln 0.95$ ج. $-\frac{1}{2} \ln 0.05$ د. $-\frac{1}{2} \ln 0.95$

۲. اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع t با v درجه آزادی باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. چگالی T حول $t = 0$ متقارن است.

ب. $t_{\alpha;v} = -t_{1-\alpha;v}$

ج. متغیر تصادفی X که به صورت $X = T^2$ تعریف شده است، دارای توزیع F با v_1 و v_2 درجه است.

د. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی همواره وجود دارند.

۳. اگر S_1^2 و S_2^2 واریانس‌های نمونه‌ای نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه‌های $n_1 = n_2 = 20$ از جامعه‌های نرمال با

واریانس‌های $\sigma_1^2 = 2$ و $\sigma_2^2 = 3$ باشد، مقدار $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 1/4\right)$ برابر است با:

$(F_{0.05;20,20} = 2/12, F_{0.01;20,20} = 2/94)$

د. 0.95

ج. 0.99

ب. 0.01

الف. 0.05

۴. اگر \bar{X}' و S'^2 از روی نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 و به صورت

$\bar{X}' = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ و $S'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ به دست آمده باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف. S'^2 یک برآورد کننده نااریب برای σ^2 است اگر جامعه نامتناهی باشد.

ب. \bar{X}' یک برآورد کننده نااریب برای μ است.

ج. S' یک برآورد کننده نااریب برای σ است.

د. S'^2 یک برآورد کننده نااریب برای σ^2 است اگر جامعه متناهی باشد.

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤال: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۵. برای دو برآوردکننده نااریب $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای پارامتر θ ، فرض کنید کارایی نسبی $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$ برابر 0.25 بدست آمده است، در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. $\hat{\theta}_2$ از $\hat{\theta}_1$ کاراتر است.

$$\frac{\text{var}(\hat{\theta}_2)}{\text{var}(\hat{\theta}_1)} = 0.25$$

ب.

ج. برای برآورد پارامتر θ ، $\hat{\theta}_2$ به 25 درصد مشاهداتی نیاز دارد که برای $\hat{\theta}_1$ مورد نیاز است برای اینکه قابلیت اعتماد آنها یکی باشد.

د. برای برآورد پارامتر θ ، $\hat{\theta}_1$ به 75 درصد مشاهداتی نیاز دارد که برای $\hat{\theta}_2$ مورد نیاز است برای اینکه قابلیت اعتماد آنها یکی باشد.

۶. در مورد برآورد کننده نااریب $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ کدام گزینه صحیح است؟

الف. $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ سازگار است اگر و فقط اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\theta}) = 0$.

ب. اگر $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ سازگار باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\theta}) = 0$.

ج. $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ سازگار است اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\theta}) = 0$.

د. اگر $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ سازگار باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ برای پارامتر θ نااریب با کمترین واریانس نیز خواهد بود.

۷. کدام گزینه صحیح است؟

الف. برآوردکننده‌های درست‌نمایی ماکزیم همواره بر برآوردکننده‌های بدست آمده از روش گشتاورها منطبق هستند.

ب. برآوردکننده‌های درست‌نمایی ماکزیم همواره وجود دارند.

ج. برآوردکننده‌های روش گشتاورها همواره وجود دارند.

د. اگر $\hat{\theta}$ یک برآورد کننده به روش درست‌نمایی ماکزیم برای پارامتر θ باشد، آنگاه به ازای تابع پیوسته $g(\theta)$ ،

$g(\hat{\theta})$ یک برآورد کننده به روش درست‌نمایی ماکزیم برای پارامتر $g(\theta)$ است.

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤالات: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۸. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از یک جامعه یکنواخت پیوسته در بازه $(\theta - 1, \theta + 1)$ با تابع چگالی $f_X(x) = \frac{1}{2}$, $\theta - 1 \leq x \leq \theta + 1$ باشد. اگر Y_1, Y_2, \dots, Y_n آماره‌های ترتیبی این نمونه تصادفی باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. برای پارامتر θ بیشمار برآورد کننده به روش ماکزیمم درستنمایی وجود دارد.ب. میانگین نمونه‌ای، \bar{X} ، یک برآورد کننده به روش گشتاورها برای پارامتر θ است.ج. $\hat{\theta}_1 = Y_1 + 1$ و $\hat{\theta}_n = Y_n - 1$ دو برآورد کننده به روش ماکزیمم درستنمایی برای پارامتر θ هستند.د. برای پارامتر θ بیشمار برآورد کننده به روش گشتاورها وجود دارد.

۹. اگر \bar{X} میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای با میانگین مجهول μ و واریانس σ^2 است. اگر بازه $(\mu - \alpha, \mu + \alpha)$ یک فاصله اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ درصد برای μ باشد که به طور معمول بدست آمده است، آنگاه:

الف. \bar{X} میانگین نمونه‌ای تصادفی همواره برابر ۳ است.ب. \bar{X} میانگین نمونه‌ای تصادفی به معلوم یا معلوم نبودن σ بستگی دارد.ج. \bar{X} میانگین نمونه‌ای تصادفی با مشخص شدن مقدار α قابل محاسبه است.د. \bar{X} میانگین نمونه‌ای تصادفی با مشخص شدن مقدار n قابل محاسبه است.

۱۰. طول قد ۲۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس دارای میانگین ۱۷۰ سانتیمتر و انحراف معیار ۱۰ سانتیمتر می‌باشد. با فرض اینکه چنین اندازه‌هایی به طور نرمال توزیع شده‌اند، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای طول قد افراد کلاس کدام است؟

$$(Z_{0.1} = 1.282, Z_{0.05} = 1.645, t_{0.025; 24} = 2.064, t_{0.05; 24} = 1.711)$$

$$\text{ب. } 170 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\text{د. } 170 \pm 1.711 \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\text{الف. } 170 \pm 1.645 \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\text{ج. } 170 \pm 2.064 \frac{10}{\sqrt{25}}$$

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤال: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۱۱. نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های $n_1 = 16$ و $n_2 = 16$ از جامعه‌های نرمال با انحراف‌معیارهای $\sigma_1 = 4/8$ و $\sigma_2 = 3/5$ دارای میانگین‌های نمونه‌ای $\bar{X}_1 = 18/2$ و $\bar{X}_2 = 23/4$ شده‌اند. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصد برای تفاضل میانگین‌های دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$ کدام است؟

$$(Z_{0.05} = 1/282, Z_{0.025} = 1/645, t_{0.025; 30} = 2/042, t_{0.05; 40} = 1/697)$$

$$\text{الف. } (18/2 - 23/4) \pm (1/282) \sqrt{\frac{(4/8)^2}{16} + \frac{(3/5)^2}{16}}$$

$$\text{ب. } (18/2 - 23/4) \pm (1/697) \sqrt{\frac{(4/8)^2}{16} + \frac{(3/5)^2}{16}}$$

$$\text{ج. } (18/2 - 23/4) \pm (2/042) \sqrt{\frac{(4/8)^2}{16} + \frac{(3/5)^2}{16}}$$

$$\text{د. } (18/2 - 23/4) \pm (1/645) \sqrt{\frac{(4/8)^2}{16} + \frac{(3/5)^2}{16}}$$

۱۲. در مورد یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای میانگین مجهول (μ) جامعه کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. هرچه طول فاصله اطمینان کوتاهتر باشد، بهتر است.

ب. هرچه امید ریاضی طول فاصله اطمینان کوتاهتر باشد، بهتر است.

ج. همواره امید ریاضی حد بالا و امید ریاضی حد پایین فاصله اطمینان باهم برابرند.

د. همواره واریانس حد بالا و واریانس حد پایین فاصله اطمینان باهم برابرند.

۱۳. اگر β احتمال خطای نوع دوم باشد، آنگاه $1-\beta$ عبارت است از:

الف. احتمال رد H_1 وقتی که نادرست است.

ب. احتمال رد H_0 وقتی که نادرست است.

ج. احتمال قبول H_0 وقتی که نادرست است.

د. احتمال قبول H_1 وقتی که درست است.

۱۴. در جعبه‌ای ۱۲ لامپ موجود است که θ تای آنها معیوب است. دو لامپ به تصادف و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر فرض $\theta = 2: H_0$ را در برابر فرض مقابل $H_1: \theta = 4$ وقتی رد کنیم که هر دو تای آنها معیوب باشند، احتمال خطای نوع اول کدام است؟

د. ۰/۱۵

ج. ۰/۰۰۵

ب. ۰/۰۲

الف. ۰/۱

۱۵. تابع چگالی $0 \leq x \leq 1, \theta > 0, f(x; \theta) = (1+\theta)x^\theta$ و سایر جاها $f(x; \theta) = 0$ مفروض است. اگر فرض صفر به شکل $H_0: \theta = 2$ بوده و ناحیه بحرانی به صورت $X < 0/25$ باشد، مقدار خطای نوع اول برابر است با:

د. $\frac{1}{64}$

ج. $\frac{3}{4}$

ب. $\frac{1}{4}$

الف. $\frac{1}{16}$

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤالات: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۱۶. یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 مقادیر نمونه‌ای $S^2 = 16$, $\bar{X} = 11$ را حاصل ساخته است. اگر $\sigma^2 = 4$ فرض شود، در آزمون $H_0: \mu = 12$ در مقابل $H_1: \mu < 12$ مقدار آماره آزمون کدام است؟
الف. $t_{(19)} = 1/118$ ب. $Z = 2/236$ ج. $t_{(19)} = -1/118$ د. $Z = -2/236$

۱۷. یکی از موارد استفاده از جدول‌های توافقی عبارت است از:

الف. آزمون نیکویی برازش ب. آزمون استقلال

ج. آزمون‌های مربوط به تفاضل میانگین‌ها د. آزمون‌های مربوط به نسبت واریانس‌ها

۱۸. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای مجهول می‌باشد. اگر در آزمون دوطرفه میانگین، خطای نوع اول را ثابت نگه داشته و اندازه نمونه را افزایش دهیم، کدام مورد زیر صحیح است؟
الف. ناحیه پذیرش بزرگ می‌شود و خطای نوع دوم افزایش می‌یابد.
ب. ناحیه پذیرش بزرگ می‌شود و خطای نوع دوم کاهش می‌یابد.
ج. ناحیه پذیرش کوچک می‌شود و خطای نوع دوم افزایش می‌یابد.
د. ناحیه پذیرش کوچک می‌شود و خطای نوع دوم کاهش می‌یابد.

۱۹. برای آزمون فرض $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ در مقابل $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ مقدار P -مقدار (P -Value) برابر است با ۰/۰۰۸. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف. فرض H_0 در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/01$ رد می‌شود.ب. فرض H_1 در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/01$ رد می‌شود.ج. فرض H_0 در سطح معنی‌داری $\alpha = 0/01$ رد نمی‌شود.د. فرض H_1 با اندازه خطای نوع دوم ۰/۰۰۸ رد می‌شود.

سؤالات تشریحی

۱. برای نمونه‌های تصادفی به اندازه $n+1$ از جامعه یکنواخت پیوسته در بازه $(0,1)$ با چگالی $f_X(x) = 1$, $0 < x < 1$ تابع چگالی احتمال میانه نمونه‌ای، \tilde{X} ، را بدست آورید.

۲. اگر X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه پواسون با پارامتر λ باشد، برآوردکننده نقطه‌ای پارامتر λ را درست‌نمایی ماکزیمم بدست آورید.

۳. اگر x مقداری از یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین β باشد، مقدار k را طوری تعیین کنید که بازه $(0, kx)$ یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ درصد برای پارامتر β باشد.

نام درس: کاربرد آمار و احتمال در مهندسی صنایع

رشته تحصیلی: گرایش: مهندسی صنایع

کد درس: ۱۱۱۷۰۷۹

تعداد سؤالات: نسی ۱۹ تکمیلی — تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۴. بیست و پنج بار اندازه گیری دمای ویژه آهنی دارای انحراف معیار ۰/۰۰۹ شده است. با فرض اینکه داده ها نمونه ای تصادفی از جامعه ای نرمال باشند، فرض $H_0: \sigma = 0/01$ را در برابر $H_1: \sigma < 0/01$ در سطح معنی دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

$$(\chi^2_{0/05;24} = 36/42, \chi^2_{0/95;24} = 13/58, \chi^2_{0/025;24} = 39/36, \chi^2_{0/975;24} = 12/45)$$

$$(\chi^2_{0/05;25} = 37/65, \chi^2_{0/95;25} = 14/61, \chi^2_{0/025;25} = 40/65, \chi^2_{0/975;25} = 13/12)$$

$$(t_{0/05;24} = 1/711, t_{0/025;24} = 2/063, t_{0/05;25} = 1/708, t_{0/025;25} = 2/059)$$

۵. اگر چگالی توام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت $f(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y} & , y > 0, 0 < x < 1 \\ 0 & , else \end{cases}$ باشد،

رگرسیون خطی Y بر حسب X را به دست آورید.

۶. جدول ناقص آنالیز واریانس یک طرفه به شرح زیر داده شده است.

منبع تغییر	درجه آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	آماره (f)
تیمارها	۲	C	۱۹۵	E
خطا	A	۲۷۶	۲۳	
جمع	B	D		

الف. مطلوبست محاسبه مقادیر مجهول A, B, C, D و E از روی جدول ناقص داده شده.

ب. اگر سطح معنی دار بودن برابر ۰/۰۱ و مقدار مناسب بدست آمده از جدول توزیع f برای این مساله برابر ۶/۹۳ باشد، آیا اختلاف بین میانگین ها معنی دار هستند؟ چرا؟

فرمول های داده شده در صورت نیاز:

چگالی احتمال متغیر تصادفی تابع احتمال متغیر تصادفی پواسون با نمایی با پارامتر (میانگین) θ : پارامتر λ : تابع چگالی توزیع گاما با پارامترهای α و β :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \quad f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots \quad f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$$