

نام درس: جبر (۳)

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۸

تعداد کل صفحات: ۴

۱. هر گروه از مرتبه ۲۴ باید چند ۲ - زیر گروه سیلو داشته باشد؟

الف. ۱ یا ۲ ب. ۳ ج. ۲ یا ۳ د. ۱ یا ۳

۲. فرض کنید G یک گروه و Z مرکز آن باشد. در این صورت:الف. اگر $|\frac{G}{Z}| = 5$ آنگاه G آبلی است. ب. اگر $|\frac{G}{Z}| = 9$ آنگاه G دوری است.ج. اگر $|\frac{G}{Z}| = 9$ آنگاه G آبلی است. د. اگر $|\frac{G}{Z}| = 5$ آنگاه G دوری است.۳. فرض کنید G گروهی از مرتبه ۲۸ باشد که دارای زیر گروهی نرمال از مرتبه ۴ است. اگر Z مرکز G باشد، آنگاه:الف. $|Z| = 4$ ب. $|Z| = 7$ ج. G گروهی آبلی است. د. G گروهی ناآبلی است.۴. فرض کنید G یک گروه از مرتبه ۱۵ باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟الف. G فقط یک زیر گروه از مرتبه ۵ دارد. ب. G فقط یک زیر گروه از مرتبه ۳ دارد.ج. G دوری است. د. G آبلی است ولی دوری نیست.۵. فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک p - زیر گروه سیلو G باشد. در این صورت تعداد p - زیر گروه‌هایسیلو G برابر است با:الف. $[G:H]$ ب. $|H|$ ج. $|N(H)|$ د. $[G:N(H)]$ ۶. تعداد ۵ زیر گروه‌های سیلو گروه G با $|G| = 225$ کدام است؟

الف. ۲ ب. ۱ ج. ۵ د. ۹

۷. مرتبه هر ۳ - زیر گروه سیلو در گروهی از مرتبه ۳۶ برابر است با:

الف. ۹ ب. ۳ ج. ۴ د. ۳۶

۸. فرض کنید R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک R - مدول باشد. در این صورت:الف. اگر M نوتری باشد آنگاه آرتینی نیز خواهد بود.ب. اگر M آرتینی باشد آنگاه نوتری نیز خواهد بود.ج. اگر M آرتینی باشد آنگاه هر زیر مدول M نیز آرتینی است.د. اگر M نوتری نباشد آنگاه ممکن است زیر مدولی داشته باشد که نوتری باشد.

۹. کدام گزاره نادرست است؟

الف. Q به عنوان Q - مدول نوتری و آرتینی است.ب. Q به عنوان Z - مدول نه نوتری و نه آرتینی است.ج. Q به عنوان Q - مدول دارای سری ترکیبی است.د. Q به عنوان Z - مدول دارای یک سری ترکیبی است.

نام درس: جبر (۳)

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۸

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

۱۰. اگر R یک حلقه جابجایی یکدار باشد در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

الف. اگر P ایده‌آل اول حلقه R باشد آنگاه $P[x]$ ایده‌آل اول $R[x]$ است.

ب. اگر P ایده‌آل اول حلقه R باشد آنگاه $\frac{R[x]}{P[x]}$ دامنه صحیح است.

ج. اگر $\frac{R}{P}$ دامنه صحیح باشد ممکن است $\frac{R[x]}{P[x]}$ دامنه صحیح نباشد.

د. اگر $\frac{R}{P}$ دامنه صحیح باشد $\frac{R[x]}{P[x]}$ نیز دامنه صحیح است.

۱۱. فرض کنید R یک حلقه جابجایی یکدار باشد. در این صورت کدام گزاره درست است؟

الف. اگر R نوتری باشد آنگاه $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ نیز نوتری است.

ب. اگر R آرتینی باشد آنگاه $R[x]$ نیز آرتینی است.

ج. اگر $R[x]$ نوتری باشد آنگاه R نیز نوتری است.

د. اگر $R[x]$ نوتری باشد آنگاه R آرتینی است.

۱۲. فرض کنید $M, R -$ مدول صفر باشد. در این صورت $Ann(M)$ برابر است با:

الف. $(M:O)$ ب. R ج. M د. صفر

۱۳. کدام گزاره نادرست است؟

الف. گروه آبدی متناهی تولید شده‌ای وجود دارد که نوتری نیست.

ب. اگر R نوتری و M یک $R -$ مدول متناهی تولید شده باشد آنگاه M نیز نوتری است.

ج. اگر R آرتینی و M یک $R -$ مدول متناهی تولید شده باشد آنگاه M نیز آرتینی است.

د. اگر R نوتری و M یک $R -$ مدول متناهی تولید شده باشد آنگاه هر زیر مدول M نیز متناهی تولید شده است.

۱۴. کدام گزینه درست است؟

الف. طول Z به عنوان Z مدول، متناهی است.

ب. طول Q به عنوان $Z -$ مدول، متناهی است.

ج. طول هر گروه آبدی متناهی (به عنوان $Z -$ مدول)، متناهی است.

د. طول $\frac{Q}{Z}$ به عنوان $Z -$ مدول، متناهی است.

۱۵. با استفاده از دنباله دقیق $0 \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow \frac{Q}{Z} \rightarrow 0$ کدام گزینه درست است؟

الف. $\frac{Q}{Z}$ به عنوان $Z -$ مدول نوتری نیست. ب. $\frac{Q}{Z}$ به عنوان $Z -$ مدول دارای سری ترکیبی است.

ج. Z آرتینی است. د. Z دارای سری ترکیبی است.

نام درس: جبر (۳)

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۸

تعداد کل صفحات: ۴

۱۶. فرض کنید R یک حلقه باشد، کدام گزینه درست نیست؟الف. اگر حلقه R نوتری باشد آنگاه هر ایده‌آل R متناهی شده است.ب. اگر هر ایده‌آل R متناهی تولید شده، آنگاه R حلقه‌ای آرتینی است.ج. اگر هر ایده‌آل R متناهی تولید شده باشد، آنگاه R حلقه‌ای نوتری است.د. اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آنگاه هر $R -$ مدول متناهی تولید شده یک $R -$ مدول نوتری است.۱۷. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه تعویض‌پذیر موضعی R باشد، در این صورت داریم:

$$\text{الف. } \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = I \quad \text{ب. } \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\} \quad \text{ج. } \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = R \quad \text{د. } \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \phi$$

۱۸. کدام گزاره نادرست است؟

الف. حلقه Z به عنوان $Z -$ مدول آزاد با پایه $\{2\}$ می‌باشد.

ب. هر میدان روی خودش یک مدول آزاد است.

ج. هر میدان به عنوان $Z -$ مدول آزاد است.د. $Z -$ به عنوان $Z -$ مدول آزاد است.۱۹. فرض کنید M یک $R -$ مدول آزاد با پایه $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ باشد. در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

$$\text{الف. } M \cong \bigoplus_{i=1}^k R \quad \text{ب. } M \cong \sum_{i=1}^k Rx_i$$

$$\text{ج. } M \cong \bigoplus_{i=1}^k Rx_i \quad \text{د. } M \cong \bigoplus_{i=1}^k Z$$

۲۰. فرض کنید $f: R \rightarrow R'$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها باشد، کدام گزاره نادرست است؟الف. M یک $R -$ مدول و $I \subseteq \text{Ann}(M)$ باشد در این صورت M نیز $\frac{R}{I} -$ مدول است.ب. اگر M یک $R -$ مدول و $I \subseteq \text{Ann}(M)$ باشد در این صورت زیر مدول‌های M به عنوان $R -$ مدول با زیرمدول‌های M به عنوان $\frac{R}{I} -$ مدول در تناظر یک به یک هستند.ج. هر $R' -$ مدول یک $R -$ مدول است.د. R' دارای ساختار $R -$ مدولی است.

نام درس: جبر (۳)

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۸

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

«سؤالات تشریحی»

۱. فرض کنید M یک $R -$ مدول باشد. نشان دهید M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول M متناهی تولید شده باشد.

۲. نشان دهید که یک $R -$ مدول M را می توان به عنوان $\frac{R}{I} -$ مدول در نظر گرفت اگر و تنها اگر $I \subseteq \text{Ann}(M)$ باشد.

۳. تنها یکی از سؤال های زیر را بیان و اثبات کنید.

الف. قضیه اشتراک کرول

ب. لم ناکایاما

۴. یکی از قضایای سیلو را بیان و اثبات کنید.

۵. فرض کنید p, q دو عدد اول باشند به قسمی که $p < q$ ثابت کنید:

الف. هیچ گروه از مرتبه pq ساده نیست.

د. اگر $p \nmid q-1$ آنگاه هر گروه G از مرتبه pq دوری است.