

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

۱- اگر  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  دو سویی باشد. کدام گزینه غلط است؟الف.  $f^{-1} : (Y, d') \rightarrow (X, d)$  موجود است.ب. اگر به ازای هر  $x, y \in X$  ،  $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$  آنگاه  $f^{-1}$  پیوسته است.ج. اگر  $f$  پیوسته باشد  $f^{-1}$  نیز پیوسته است.د. اگر به ازای هر  $x, y \in X$  ،  $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$  آنگاه  $f$  پیوسته است.

۲- کدام گزینه غلط است؟

الف. هر تابع خطی بر یک فضای نرمدار پیوسته است.

ب. هر تابع خطی از  $R^n$  به  $R^n$  در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.ج. مجموعه‌ی تمام توابع خطی و پیوسته از فضای نرمدار  $V$  به فضای نرمدار  $W$  یک فضای نرمدار است.د. هر تابع خطی بر فضای نرمدار  $V$  بر  $V$  پیوسته است اگر و فقط اگر در صفر پیوسته باشد.

۳- کدام گزینه غلط است؟

الف.  $f : R^3 \rightarrow R$  با ضابطه‌ی  $f(x, y, z) = x^y e^{-yz}$  مفروض است مشتق تابع در  $(1, 0, 0)$  و در امتداد

$$u = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ برابر } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ است.}$$

ب. مشتق تابع  $f(x) = (e^x, \sqrt{x}, \frac{1}{x})$  در  $x=1$  وجود دارد.ج. اگر  $f$  در  $x=a$  مشتق پذیر باشد، در  $a$  پیوسته است.د. وجود مشتق یک تابع در امتدادهای معینی در نقطه  $a$ ، پیوستگی آن را در  $a$  تضمین می کند.۴-  $f : R^2 \rightarrow R$  مفروض است، کدام گزینه نادرست است؟الف.  $f(x, y) = |x^2 - y^2|$  در  $(0, 0)$  دارای مشتق صفر است.ب.  $f(x, y) = |x y|^k$  به ازای هر  $k$  در  $(0, 0)$  مشتق پذیر است.ج.  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است اگر برای تابع خطی مناسبی مانند  $\lambda : R^2 \rightarrow R$ 

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

$$\|h\| \rightarrow 0$$

د. اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد.  $Df(a)$  یک تابع خطی است.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: ۲۰ نیمی تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

۵-  $f: R^m \rightarrow R^n$  مفروض است آنگاه :

الف. اگر  $f$  خطی باشد و در  $a$  مشتق پذیر باشد.  $Df(a) = f(a)$

ب. اگر  $f$  خطی باشد، پیوسته است.

ج. اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد  $Df \in L(R^m, R^n)$

د. تابع  $Df$  پیوسته است.

۶- برای تابع  $f = (f_1, \dots, f_n): R^m \rightarrow R^n$  کدام گزینه غلط است؟

الف.  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است اگر و فقط اگر هر  $f_i$  در  $a$  مشتق پذیر باشد

ب.  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است اگر هر مشتق جزئی  $D_i f_j$  در  $a$  موجود و برگوی بازی به مرکز  $a$  پیوسته باشد.

ج.  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است اگر هر مشتق جزئی  $D_i f_j$  در نقطه  $a$  موجود باشد.

د.  $D_u f(a) = Df(a)u$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^p + y^p) \sin \frac{1}{x^p + y^p} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۷- تابع  $f: R^p \rightarrow R$  با ضابطه ی

مفروض است آنگاه :

الف.  $Df(0, 0)$  موجود و پیوسته است.

ب.  $D_1 f(0, 0), D_p f(0, 0)$  پیوسته اند.

ج.  $Df(0, 0) = 0$  و  $D_1 f(x, x) = p x \sin \frac{1}{p x^p} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{p x^p}$

د.  $D_1 f(x, x)$  بر هر همسایگی  $(0, 0)$  کراندار است.

۸- تابع  $f: R \rightarrow R^p$  با ضابطه ی  $f(x) = (\cos x, \sin x)$  مفروض است کدام گزینه غلط است؟

الف.  $Df(c) = (-\sin c, \cos c)$

ب. در نقاط  $u = 0, v = \frac{\pi}{p}$  و هر  $c \in R$   $f(v) - f(u) \neq Df(c)(v - u)$

ج. به ازای هر  $u, v$  از  $R$   $c \in R$  موجود است که  $f(v) - f(u) = Df(c)(v - u)$

د. به ازای هر  $u, v \in R$   $\|f(v) - f(u)\| \leq \|u - v\|$

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

۹- کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر مشتق یک تابع حقیقی بر یک بازه صفر شود، تابع بر آن بازه ثابت است.

ب. اگر مشتق تابع  $f: G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  بر مجموعه‌ی بازو همبند  $G$  صفر باشد  $f$  تابعی ثابت است.ج. اگر  $f: G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  در  $c \in G$  مشتق پذیر باشد و  $Jf(c) \neq 0$ ،  $\delta > 0$  موجود است که اگر

$$\|x - c\| < \delta \implies \|f(x) - f(c)\| < \frac{\|h\|}{\|Df(c)^{-1}\|}$$

د. اگر  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  در نقطه  $c \in \mathbb{R}^m$  مشتق پذیری باشد آنگاه  $\|f\|$  نیز در  $C$  مشتق پذیر است۱۰- اگر  $(X, \rho)$  یک فضای متریک کامل و  $\Omega: X \rightarrow X$  آنگاه:الف. اگر  $\Omega^p$  یک انقباض باشد،  $\Omega$  نیز یک تابع انقباض است.ب. معادله  $\Omega(x) = x$  دارای جواب منحصر به فرد است.ج. اگر  $\rho(\Omega(x), \Omega(y)) \leq \rho(x, y)$  به ازای هر  $x, y \in X$ ، آنگاه  $\Omega$  یک تابع انقباض است.د. اگر  $\rho(\Omega(x), \Omega(y)) \leq k\rho(x, y)$  برای هر  $x, y \in X$  که  $k < 1$  آنگاه  $\Omega$  یک تابع انقباض است.۱۱- تابع  $f(x, y) = x + \sin y$  مفروض است کدام گزینه صحیح است؟الف. معادله  $x + \sin y = 0$  دارای جوابی به صورت  $(x, y)$  است که  $|x| > 1$ ب. معادله  $x + \sin y = 0$  در  $[-1, 1] \times [-\beta, \beta]$  که  $\beta > \frac{\pi}{2}$  دارای جواب منحصر به فرد است.ج. به ازای هر  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  تابعی مانند  $\phi$  موجود است بطوریکه  $y = \phi(x)$  تنها جواب معادله‌ی  $x + \sin y = 0$  باشد.د. معادله  $x + \sin y = 0$  در  $[-1, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  دارای جواب منحصر به فردی است مانند  $y = \phi(x)$  که از $(0, 0)$  می‌گذرد.

۱۲- کدام گزینه نادرست است؟

الف. وارونه موضعی تابع  $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$  در هر نقطه که  $(x, y) \neq (0, 0)$  موجود است.ب. تابع  $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$  دارای وارونه  $\phi$  در همسایگی از هر نقطه‌ی  $(x, y, z)$  است.ج.  $f(x, y) = (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y)$  در همسایگی نقاطی مانند  $(\alpha, \beta)$  که  $\alpha - \beta \neq n\pi$  دارای وارون است.د. معادله‌های  $\begin{cases} xe^y = u \\ xe^{-y} = v \end{cases}$  دارای جواب یکتایی در همسایگی هر نقطه  $(\alpha, \beta)$  که  $\alpha \neq 0$  می‌باشد.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

۱۳- کدام گزینه صحیح است؟

الف. توابع  $f_1, f_2$  بر  $R^2$  با ضابطه‌ی  $f_1(x, y) = x \cos y$  و  $f_2(x, y) = x \sin y$  در هر زیر مجموعه‌ی باز از  $R^2$  وابسته‌ی تابعی نیستند.

ب.  $g_1(x, y) = \cos(x + y)$  و  $g_2(x, y) = \sin(x + y)$  وابسته‌ی تابعی اند.

ج.  $f_1(x, y) = x + y$  و  $f_2(x, y) = \sin(x + y)$  وابسته‌ی تابعی نیستند.

د. الف و ب

۱۴- کدام گزینه غلط است؟ هرگاه  $f: R^m \rightarrow R^n$  دو مرتبه مشتق پذیر باشد.

الف.  $Df: R^m \rightarrow R^n$

ب.  $Df(c): R^m \rightarrow R^n$

ج.  $D^2 f(c) \in L(R^m, L(R^m, R^n))$

د.  $D^2 f: R^m \rightarrow L(R^m, L(R^m, R^n))$

۱۵- هر خم در  $R^n$  که نماینده‌ای به صورت  $\phi$  بر  $[a, b]$  داشته باشد طولپذیر است اگر:

الف. مجموعه  $\{D\phi\}$  روی  $[a, b]$  تغییر می‌کند  $\{\Lambda(D, \phi)\}$  کراندار باشد.

ب. اگر هر تابع مولفه‌ای  $\phi_1, \dots, \phi_n$  که  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار باشد.

ج. اگر خم یک مسیر باشد.

د. هر سه مورد فوق صحیح است.

۱۶- کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر مجموعه‌ی  $G$  در  $R^n$  باز و  $f: G \rightarrow R^n$  پیوسته باشد و  $\gamma$  یک مسیر در  $G$  باشد

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f_1(x) dx_1 + \dots + \int_{\gamma} f_n(x) dx_n$$

ب. اگر  $\gamma$  مسیری در  $R^2$  با ضابطه‌ی  $x = \cos t$  و  $y = \sin t$   $0 \leq t \leq 2\pi$  آنگاه  $\int_{\gamma} x^2 y dx - x^3 dy = -\pi$

ج. اگر  $\phi$  بر  $[a, b]$  یک راه طولپذیر بر  $R^n$  باشد آنگاه  $\lim_{\|D\| \rightarrow 0} \Lambda(D, \phi) = \Lambda_a^b(\phi)$

د. مسیری در  $R^n$  وجود دارد که طولپذیر نیست.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

۱۷- اگر  $I$  بازه بسته‌ای دلخواهی شامل مجموعه‌ی  $E$  باشد  $E \subset R^n$  کدام گزینه غلط است؟

الف.  $\underline{C}(E) \leq \overline{C}(E)$

ب. قدر داخلی و قدر خارجی  $E$  در صورت وجود برابرند.

ج.  $C(I) = v(I)$

د.  $\underline{C}(E) = \int_1 E$

۱۸- مجموعه‌ی کراندار  $E$  در  $R^n$  مفروض است کدام گزینه غلط است؟

الف.  $E$  دارای قدر صفر است اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  تعداد شمارا بازه بسته که  $E$  را می‌پوشاند باشد که مجموع قدر آنها کمتر از  $\varepsilon$  است.

ب. اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  تعداد متناهی بازه بسته که  $E$  را می‌پوشاند باشد که مجموع قدر آنها کمتر از  $\varepsilon$  است آنگاه  $E$  دارای قدر صفر است.

ج. اگر مرز آن دارای قدر صفر باشد،  $E$  دارای قدر است.

د. اگر قدر  $E$  صفر باشد و تابع کراندار  $f$  بر بازه‌ی بسته‌ی  $I$  شامل  $E$  بجز نقاط  $E$  پیوسته باشد آنگاه  $f$  بر  $I$  انتگرالپذیر است.

۱۹- کدام گزینه صحیح است؟

الف. هر  $1$ -فرم کامل بسته است.

ب. هر  $1$ -فرم بسته کامل است.

ج. یک فرم  $\omega$  به صورت  $\omega = Mdx + Ndy$  کامل است اگر  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

د. گزینه الف و ج

۲۰- اگر  $v_1, \dots, v_n$  یک پایه فضای برداری  $V$ ،  $\phi_1, \dots, \phi_n$  پایه دو گان آن باشد کدام گزینه غلط است؟

الف. مجموعه‌ی  $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}$  ( $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ ) یک مبنای فضای برداری  $\tau^k(V)$  است.

ب. بعد فضای  $\tau^k(V)$  برابر  $n^k$  است.

ج. اگر  $T \in \tau^k(V)$  آنگاه  $Alt(T) \in A^k(V)$

د. بعد فضای  $A^k(V)$  برابر  $n^k$  است

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (کاربردی-محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۶

تعداد کل صفحات: ۶

## سؤالات تشریحی:

۱- اگر  $X$  زیر مجموعه‌ای از  $S, R^m$  زیر مجموعه‌ی محدب  $X$  باشد  $f: X \rightarrow R^n$  در تمام نقاط  $S$  مشتق پذیر باشد و مجموعه‌ی  $\{\|Df(x)\| \mid x \in S\}$  کراندار باشد آنگاه به ازای هر  $u, v$  از  $S$  داریم:

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left( \sup_{x \in S} \|Df(x)\| \right) \|u - v\|$$

۲- تابع  $f: X \rightarrow R$  در نقطه درونی  $C$  از  $X$  مشتق پذیر است. ثابت کنید هر مشتق جهتی  $D_u f(c)$  موجود است

$$D_u f(c) = Df(c)u$$

و داریم

۳- قضیه تابع وارون را بیان و اثبات نمایید.

۴- فرض کنید  $a \neq 0$ , مسیری در  $R^3$  با ضابطه‌ی زیر باشد.

$$x = a(1 + \cos 2t) \quad y = a \sin 2t \quad z = 2a \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_{\gamma} ((y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz)$$

۵-  $\chi_C$  را تابع مشخصه مجموعه‌ی  $C$  در نظر می‌گیریم. اگر  $A$  بازه بسته‌ای از  $R^n$ ,  $C \subset A$  باشد تابع

$$\chi_C: A \rightarrow R$$

انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر مرز  $C$  دارای اندازه صفر باشد.