

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و گد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

امام علی^(ع): شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.۱. فرض کنید X تک مشاهده از چگالی $0 < x < 1; \theta > 0$; $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$ باشد کمیت محوری کدام است؟

الف. X^θ ب. θX ج. $\frac{X}{\theta}$ د. X

۲. در نمونه گیری از توزیع برنولی با پارامتر θ ، انحراف معیار بزرگ نمونه ای برآوردگر درستنمایی ماکزیم θ کدام است؟

الف. $\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$ ب. $\theta(1-\theta)$
ج. $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ د. $\sqrt{\theta(1-\theta)}$

۳. اگر x_1, \dots, x_n نمونه ای تصادفی از چگالی $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} I_{(0,1)}(x)$ ($\theta > 0$) و $(\frac{4u}{3}, 2u)$ فاصله اطمینان برای θ باشد، امید ریاضی طول بازه اطمینان برابر است با: $(u = -\sum_{i=1}^n \ln x_i)$

الف. $\frac{20}{3}\theta$ ب. $\frac{30}{4}\theta$ ج. 2θ د. $\frac{20}{19}\theta$

۴. سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم که یک شیر و دو خط حاصل می شود، اگر (V_1, V_2) فاصله اطمینان احتمال شیر آمدن سکه بهدست آمده در روش آماری باشد، با فرض $P_1 = 0.028$ و $P_2 = 0.657$ مقدار (V_1, V_2) کدام است؟

الف. $(0.1, 0.3)$ ب. $(0.3, 0.9)$
ج. $(0.6, 0.9)$ د. $(0.7, 0.9)$

۵. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از چگالی احتمال به فرم $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} g(\frac{x}{\theta})$ باشد. در این صورت کدام

یک از موارد زیر کمیت محوری است؟

الف. $\sum_{i=1}^n X_i$ ب. $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\theta}$ ج. $\frac{\bar{X} - \theta^2}{\theta}$ د. $\frac{Y_i}{\sqrt{\theta}}$

۶. شانس پیروزی ورزشکاری در یک مسابقه P است، اگر در ۴ تا از اینگونه مسابقه های مستقل، تعداد پیروزیها کمتر از ۲ باشد،فرض $H_0: P = \frac{1}{2}$ را در قبال فرض $H_1: P = \frac{1}{4}$ رد می کنیم. احتمال خطای نوع اول کدامست؟

الف. $\frac{1}{4}$ ب. $\frac{1}{10}$ ج. $\frac{5}{16}$ د. $\frac{7}{12}$

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و گد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۷. بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی از $N(\mu, 1)$ ، کوچکترین حجم نمونه لازم، برای آنکه احتمالهای خطای نوع اول و دوم آزمون $H_0: \mu = 0$ در مقابل $H_1: \mu = 1$ به ترتیب α, β باشند، کدامست؟ فرض کنید $(P(Z > Z_{1-\alpha}) = \alpha$

الف. Z_β^2

ب. $(Z_\beta - Z_\alpha)^2$

ج. $(Z_\beta - Z_{1-\alpha})^2$

د. $(Z_\alpha - Z_{1-\beta})^2$

۸. آماره آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته به اندازه $\alpha = 0.1$ با یک تک مشاهده از تابع احتمال زیر برای آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_1$ در مقابل $H_1: \theta \neq \theta_1$ کدامست؟

$\theta \backslash x$	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	۰/۱	۰/۷	۰/۲۵
x_2	۰/۳	۰/۲	۰/۱
x_3	۰/۶	۰/۱	۰/۶۵

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & x = x_3 \\ \frac{3}{2} & x = x_2 \text{ ب.} \\ \frac{12}{13} & x = x_1 \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & x = x_2 \text{ الف.} \\ \frac{3}{2} & x = x_1 \\ \frac{12}{13} & x = x_3 \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{3}{13} & x = x_1, x_2 \text{ د.} \\ \frac{3}{2} & x = x_3 \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & x = x_1 \\ \frac{3}{2} & x = x_2 \text{ ج.} \\ \frac{12}{13} & x = x_3 \end{cases}$$

۹. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0, \theta)$ باشد در این صورت خانواده توزیع های $N(0, \theta)$ نسبت به کدام آماره دارای خاصیت نسبت درستنمایی یکنواست؟

د. $\sum X_i^2$

ج. $\sum X_i$

ب. $\sum \ln X_i$

الف. $(\sum X_i)^2$

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و گد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۱۰. اگر x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از چگالی $f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$ باشند، تواناترین آزمون بطور یکنواخت در سطح α برای فرض $H_0: \theta \leq \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta > \theta_0$ کدامست؟ $(Y_1 = \min\{x_1, \dots, x_n\})$

الف. $y_1 > \sqrt{\theta_0 + \frac{1}{n} \ln \alpha}$

ب. $y_1 > \sqrt{\theta_0 - \frac{1}{n} \ln \alpha}$

ج. $y_1 > \theta_0 + \frac{1}{n} \ln \alpha$

د. $y_1 > \theta_0 - \frac{1}{n} \ln \alpha$

۱۱. اگر x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از چگالی زیر باشند، آنگاه این خانواده از توابع چگالی احتمال نسبت به کدامیک از آماره‌های

زیر دارای خاصیت MLR است؟ $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} I_{(0,1)}(x)$

الف. \bar{x} ب. $-\bar{x}$ ج. $-\sum_{i=1}^n \ln x_i$ د. $\ln \sum_{i=1}^n x_i$

۱۲. اگر خانواده توزیع‌های $\{f(x; \theta), \theta \in \Theta\}$ نسبت به آماره $T(x)$ دارای خاصیت MLR افزایشی باشد، آنگاه کدام مورد زیر درست است؟ $(\theta_0 < \theta_1)$

الف. $\frac{-L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$ تابعی کاهشی از $T(x)$ است.

ب. تابع $\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)}$ تابعی افزایشی از $T(x)$ است.

ج. تابع $\frac{-L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$ تابعی کاهشی از $T(x)$ است.

د. $\frac{+L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$ تابعی کاهشی از $T(x)$ است.

۱۳. در آزمون نسبت احتمال دنباله‌ای، عمل نمونه‌گیری تحت چه شرطی متوقف می‌شود؟

الف. $\lambda(x) \leq k_0$ ب. $\lambda(x) \geq k_1$

ج. $k_0 < \lambda(x) < k_1$ د. الف و ب

۱۴. در سؤال شماره ۱۳ با فرض $\alpha = 0.02$ و $\beta = 0.05$ ، مقدار تقریبی زوج (k_0, k_1) کدام است؟

الف. $(0.04, 1.06)$ ب. $(1.06, 0.04)$

ج. $(4.06, 1.04)$ د. $(0.04, 6.01)$

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۱۵. در سؤال شماره ۱۳، $E_{H_0}(\ln \lambda_N)$ چیست؟الف. $\alpha Lnk_0 + (1 - \alpha)Lnk_1$ ب. $(1 - \alpha)Lnk_0 + \alpha Lnk_1$ ج. $\beta Lnk_0 + (1 - \beta)Lnk_1$ د. $(1 - \beta)Lnk_0 + \beta Lnk_1$

۱۶. مدل خطی $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ را در حالت A در نظر بگیرید. ماتریس کوواریانس بردار $\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}$ کدامست؟

$$(ss_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ss_x} \right) & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad \text{ب.}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \frac{-\bar{x}\sigma^2}{ss_x} \\ \frac{-\bar{x}\sigma^2}{ss_x} & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad \text{الف.}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ \frac{\sigma^2}{ss_x} & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad \text{د.}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ss_x} \right) & \frac{-\bar{x}\sigma^2}{ss_x} \\ \frac{-\bar{x}\sigma^2}{ss_x} & \frac{\sigma^2}{ss_x} \end{pmatrix} \quad \text{ج.}$$

۱۷. کدام مورد درباره سؤال ۱۶، صحیح است؟

ب. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ مستقل نیستند، اما هر دو از $\hat{\sigma}^2$ مستقلند.الف. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ مستقلند.د. توزیع $\hat{\beta}_1$ نامشخص است.ج. توزیع $\hat{\beta}_0$ مشخص نیست.۱۸. در سؤال ۱۶، بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی از (x, y) ، اگر Λ آماره نسبت درستمایی تعمیم یافته فرض $H_0: \beta_1 = 0$:در مقابل $H_1: \beta_1 \neq 0$ باشد، توزیع $(\Lambda - 1) \left(\frac{n-2}{n} \right)$ چیست؟

د. نرمال استاندارد

ج. تی استودنت

ب. کای دو

الف. فیشر

۱۹. مدل خطی $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ را در حالت B ، در نظر بگیرید. برآورد σ^2 چیست؟

$$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{n} \quad \text{د.}$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \quad \text{ج.}$$

$$\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{ب.}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i \quad \text{الف.}$$

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۲۰. در سؤال ۱۹، توزیع $\hat{\beta}_1$ (برآورد کمترین مربعات) کدام است؟

الف. نرمال ب. کای دو ج. تی استودنت د. نامشخص

« سؤالات تشریحی »

بارم هر سؤال ۱/۶ نمره می باشد.

۱. فرض کنید x یک تک مشاهده از چگالی $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ و $y = -\frac{1}{\ln x}$ باشند.الف. نشان دهید $(\frac{y}{\theta}, y)$ یک بازه اطمینان برای θ است. ضریب اطمینان آن را بیابید.ب. کوتاهترین بازه اطمینان با ضریب اطمینان r را به کمک y برای θ بدست آورید.۲. اگر x_1 و x_2 نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازه $(0, \theta)$ باشد که در آن $(\theta > 1)$ و ناحیه بحرانی فرض $H_0: \theta = 2$:در مقابل $H_1: \theta = 4$ $x_1 x_2 \geq \frac{1}{\theta}$ باشند، تابع توان و اندازه آزمون را بدست آورید.۳. اگر x_1, \dots, x_n نمونه‌ای تصادفی از چگالی $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$ باشند، ثابت کنید پرتوانترین آزمون در سطح α برای $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta = 5$ برابر است با: $\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{1}{\theta} \chi_{r,n,\alpha}^2$ ۴. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n \sim f(x; \theta)$ که در آن $f(x; \theta) = \theta^x x e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$ آیا تواناترین آزمون به طوریکنواخت به اندازه α برای آزمون $\begin{cases} H_0: \theta \leq 1 \\ H_1: \theta > 1 \end{cases}$ وجود دارد؟ در صورت پاسخ مثبت این آزمون چیست؟۵. در مدل خطی $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ در حالت نوع A برآورد پارامترهای α و β و σ^2 را بر اساس نمونه تصادفی n تایی از (X, Y) بیابید.

نام درس: آمار ریاضی ۲

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۲- جدول احتمالات تجمعی دو جمله‌ای $P[X \leq c] = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

		p										
		.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
$n=1$	0	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050
	1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=2$	0	.902	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.002
	1	.997	.990	.960	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190	.097
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=3$	0	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000
	1	.993	.972	.896	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028	.007
	2	1.000	.999	.992	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271	.143
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=4$	0	.815	.656	.410	.240	.130	.063	.026	.008	.002	.000	.000
	1	.986	.948	.819	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004	.000
	2	1.000	.996	.973	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052	.014
	3	1.000	1.000	.998	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344	.185
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=5$	0	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000
	1	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000
	2	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001
	3	1.000	1.000	.993	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081	.023
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=6$	0	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000
	2	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000
	3	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002
	4	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n=7$	0	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.577	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000	.000
	2	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000
	3	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000
	4	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004