

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۷۲

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. اگر  $u(t) = Ct + C^2$  بازای هر  $C$  جوابی از معادله دیفرانسیل  $u' = \frac{-t + (t^2 + 4u)^2}{2}$  باشد آنگاه کدامیک از توابع زیر یک جواب منفرد آن است؟

الف.  $u(t) = 1 - t$  ب.  $u(t) = \frac{t}{2} + 3$  ج.  $u(t) = -\frac{t^2}{4}$  د.  $u(t) = 5t^2 - 1$

۲. دومین تقریب معادله  $u' = 1 + u^2$ ،  $u(0) = 0$  کدام است؟

الف.  $1 + \frac{t^2}{2}$  ب.  $t$  ج.  $t^3$  د.  $t + \frac{t^3}{3}$

۳. اگر معادله دیفرانسیل  $u'' - 3u' - 8u = 0$  را به صورت  $X' = AX$  که در آن  $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  بنویسیم  $A$  کدام است؟

الف.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ب.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  ج.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  د.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

۴. اگر  $u(t)$  روی بازه  $[0, 1]$  پیوسته و نامنفی باشد و در نامساوی  $u(t) \leq \int_0^t u(s) ds$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) صدق کنند آنگاه:

الف.  $u(t) = Ct$  که  $C$  عدد ثابتی ناصفر است. ب.  $u(t)$  تابع ثابت صفر است.ج.  $u(t)$  تابع ثابت یک است. د.  $u(t) = t$  تابع همانی است.۵. فرض کنید که  $A(a_{ij})$  یک ماتریس ساده و  $B(t)$  یک ماتریس پیوسته بر  $(r_1, r_2)$  اگر  $\varphi(t)$  یک جواب اصلی $x' = Ax$  باشد جواب  $x' = Ax + B(t)$  با شرط اولیه  $x(0) = x_0$  به چه صورت است؟

الف.  $x(t) = \int_0^t \varphi(s)\beta(s)ds$  ب.  $x(t) = \varphi(t)x_0 + \int_0^t \varphi(t-s)\beta(s)ds$

ج.  $x(t) = \varphi(t)x_0 + \int_0^t \varphi(s)\beta(s)ds$  د.  $x(t) = \varphi(t) + x_0 \int_0^t \varphi(t-s)\beta(s)ds$

۶. کدام تابع زیر روی بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  یک جواب نامعادله دیفرانسیلی  $u' > u^2$  است؟

الف.  $\operatorname{tg} t$  ب.  $\cot g t$  ج.  $\sin t$  د.  $t + \sin t$

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۵ — تشریحی

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۷۲

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه  
[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

۷. کدامیک از مسائل با مقدار اولیه زیر روی بازه  $[0, 1]$  دارای جواب یگانه نمی باشند؟

الف.  $tu'' + u' + u = 0, u(0) = u'(0) = 1$  ب.  $u'' + (tgt)u = 0, u(0) = 0, u'(0) = 1$

ج.  $u'' + tu' + u = 0, u(0) = u'(0) = 0$  د.  $2u'' + 3u' + u = 0, u(0) = u'(0) = 2$

۸. جواب مسأله  $u'' = u + 2e^t, u(0) = 1$  کدام است؟

الف.  $u(t) = te^t$  ب.  $u(t) = 2te^t$  ج.  $u(t) = (2t + 1)e^t$  د.  $u(t) = (t + 1)e^t$

۹. در چه صورت ماتریس  $n \times n$  را پایدار می گوئیم؟

الف. دترمینان آن صفر باشد.

ج. دترمینان آن ناصفر باشد.

۱۰. کدام گزینه زیر در مورد جوابهای معادله  $u'' - \frac{2}{t+1}u' + u = 0$  درست است؟

الف. تمام جوابهای آن نوسانی هستند.

ج. تمام جوابهای آن غیر نوسانی هستند.

۱۱. اگر  $A(t)$  ماتریس متناوب و  $\phi$  یک ماتریس اصلی دستگاه  $X' = A(t)X$  باشد کدام گزینه درست است؟

الف.  $\phi(t+w)$  نیز یک ماتریس اصلی دستگاه است. ب.  $\phi(t) + w$  نیز یک ماتریس اصلی دستگاه است.

ج.  $\phi(w) + t$  نیز یک ماتریس اصلی دستگاه است. د.  $\phi(t+w)$  نیز یک ماتریس اصلی دستگاه است.

۱۲. کدام گزینه زیر در مورد جوابهای معادله  $u' = 1$  درست است؟

الف. تمام جوابهای آن ناپایدار هستند.

ج. تمام جوابهای آن پایدار و کراندار هستند.

د. تمام جوابهای آن پایدارند ولی کراندار نیستند.

۱۳. رونیسکی دو جواب مستقل خطی معادله  $a_0(t)u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u = 0$   $a_0(t) \neq 0$  برابر است با:

الف.  $C \exp\left[-\int \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right]$  ب.  $C \exp\left[\int \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right]$

ج.  $C \exp\left[-\int \frac{a_0(s)}{a_1(s)} ds\right]$  د.  $C \exp\left[\int \frac{a_0(s)}{a_1(s)} ds\right]$

۱۴. در مورد تابع اسکالر  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  کدام گزینه درست است؟

الف. این تابع در صفحه نیمه معین مثبت و در  $R^3$  معین مثبت است.

ب. این تابع در صفحه معین مثبت و در  $R^3$  نیمه معین مثبت است.

ج. این تابع در صفحه نیمه معین مثبت و در  $R^3$  نیمه معین منفی است.

د. این تابع در صفحه نیمه معین منفی و در  $R^3$  معین مثبت است.

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۷۲

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تئوری نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۵. فرض کنید که تمام جوابهای  $u'' + a(t)u = 0$  روی  $[0, +\infty)$  کراندار باشند در این صورت جوابهای کدام معادله زیر نیز روی  $[0, \infty)$  کراندار است.

ب.  $u'' + (a(t) + \frac{1}{t})u = 0$

الف.  $u'' + (a(t) + e^t)u = 0$

د.  $u'' + (a(t) + 1)u = 0$

ج.  $u'' + (a(t) + \frac{1}{\sqrt{t}})u = 0$

۱۶. در مورد جوابهای نابديهی معادله  $tu'' + (t+1)u = 0$  کدام گزینه درست است؟

- الف. تمام جوابهای آن مثبت و غیرنوسانی هستند.  
 ب. تمام جوابهای آن منفی و غیرنوسانی هستند.  
 ج. تمام جوابهای آن نوسانی هستند.  
 د. بعضی از جوابهای آن نوسانی و بعضی غیرنوسانی است.

۱۷. اگر  $q^+(s) = \max\{q(s), 0\}$  تعریف کنیم تحت کدام شرط زیر جواب نابديهی  $u'' + q(t)u = 0$  در بازه  $[0, 1]$  دارای دو صفر است.

ب.  $\int_0^1 q^+(s)ds > 1$

الف.  $\int_0^1 q^+(s)ds = 1$

د.  $\int_0^1 q^+(s)ds > 4$

ج.  $\int_0^1 q^+(s)ds < 1$

۱۸. دستگاه دو بعدی  $\begin{cases} x_1' = -px_1 - x_p \\ x_p' = px_1 - px_p \end{cases}$  مفروض است در مورد نقطه  $(0, 0)$  کدام گزینه درست است؟

- الف. مجانباً پایدار است. ب. ناپایدار است. ج. پایدار است. د. تعادل پایدار است.

۱۹. دستگاه دو بعدی  $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_p \\ x_p' = x_1 - x_p^3 \end{cases}$  را در نظر بگیرید اگر  $V(x_1, x_p) = x_1^2 + x_p^2$  در این صورت مشتق  $V^*$  نسبت به این دستگاه دوبعدی کدام است؟

ب.  $V^*(x_1, x_p) = x_1^2 + x_p^2$

الف.  $V^*(x_1, x_p) = -x_1^2 - x_p^2$

د.  $V^*(x_1, x_p) = x_p^3$

ج.  $V^*(x_1, x_p) = -2x_1^2 - 2x_p^2$

۲۰. کدامیک از چند جمله‌ایهای مشخصه  $L(\lambda)$  زیر پایدار است؟

ب.  $L(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5$

الف.  $L(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 2$

د.  $L(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5$

ج.  $L(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۷۲

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

سؤالات تشریحی:

۱. فرض کنید  $u_1 = \varphi(t)$  جوابی از معادله  $u' = p(t)u + q(t)u'' + r(t)$  (۱) باشد. نشان دهید که این معادله

جواب دیگری بصورت  $u_2 = \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)}$  دارد که در آن  $v = \psi(t)$  جوابی از معادله  $v' = a(t)v + b(t)$  (۲) می باشد. توابع  $a(t)$  و  $b(t)$  را برحسب توابع ضریب معادله (۱) بدست آورید.

۲. اگر  $\varepsilon > 0$  و بازای هر  $t \in \mathbb{R}$  ثابت کنید که جوابهای نابديهی  $u'' + a(t)u = 0$  نوسانی هستند.

۳. اگر  $\varphi$  یک ماتریس اصلی دستگاه خطی همگن  $x' = A(t)x$  و  $C$  یک ماتریس ثابت نامنفرد باشد نشان دهید که  $\varphi C$  نیز یک ماتریس اصلی دستگاه فوق است و بعلاوه ثابت کنید که هر ماتریس اصلی دستگاه فوق به صورت  $\varphi C$  است که در آن  $C$  ماتریس ثابت و عادی است.

۴. پایداری جواب صفر دستگاه  $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$  را با استفاده از روش کراسوفسکی مشخص کنید.

۵. ماتریس اساسی دستگاه  $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$  را بدست آورید.