

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضوعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۵ نمره تشریحی ۶۵ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. خط مماس بر خم ماریچ $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, t)$ در نقطه $\alpha(0)$ کدام است؟

الف. $\beta(u) = (ru, -r, u)$ ب. $\beta(u) = (-r, ru, u)$

ج. $\beta(u) = (r, ru, u)$ د. $\beta(u) = (-ru, r, u)$

۲. فرض کنید $F = (x^2 - y^2, yz, y + z)$ نگاشتی از E^3 به E^3 باشد. F_* کدام است؟

الف. $F_* = (rxdx - rydy, ydz, dy + dz)$

ب. $F_* = (rx - ry, y + z, x + z)$

ج. $F_* = ((rx - ry)dx, (y + z)dy, ydz)$

د. $F_* = (rxdx - rydy, ydz, dy + dz)$

۳. فرض کنید $\alpha(t) = (t^2 - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ یک خم در E^3 باشد. در نقطه $\alpha(1)$ اجزای دستگاه فرنه کدام هستند؟

الف. $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, -1, 2), N = \frac{1}{2}(-2, 0, 0), T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, 2)$

ب. $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, 2), N = \frac{1}{2}(-2, 0, 0), T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 0, 2)$

ج. $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 2, -2), N = \frac{1}{2}(0, 0, -2), T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, -1, 2)$

د. $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 0, -2), N = \frac{1}{2}(0, 0, -2), T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, -2)$

۴. فرض کنید α خم تست شماره ۳ باشد. در اینصورت در نقطه $\alpha(1)$ ، مقادیر k و τ کدام هستند؟

الف. $k = \tau = \frac{1}{6}$ ب. $k = \frac{1}{12}$ و $\tau = \frac{1}{6}$

ج. $k = \frac{1}{6}$ و $\tau = \frac{1}{12}$ د. $k = \tau = \frac{1}{12}$

۵. فرض کنید α خم تست شماره ۳ باشد. α چگونه است؟

الف. ماریچ استوانه‌ای ب. ماریچ مستدیر ج. خم مسطح د. خم کروی

۶. فرض کنید β خمی با تندی واحد باشد که تماماً روی کره \sum به شعاع a و به مرکز مبدأ E^3 قرار دارد. کدام گزینه درست است؟

الف. $k \leq \frac{1}{a}$ ب. $k \geq \frac{1}{a}$ ج. $k \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ د. $k \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۵۰ - تشریحی: ۵

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضوعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۵۱

زمان امتحان: تستی و تشریحی ۷۵ دقیقه تشریحی ۶۵ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۷. فرض کنید β خمی با تنیدی واحد در E^3 با خمیدگی مثبت، و $\bar{\beta} = F(\beta)$ نگاره آن بوسیله ایزومتري F از E^3 باشد. در اینصورت کدام گزینه درست است؟

الف. $\bar{\tau} = \tau$ ب. $\bar{\tau} = F(\tau)$ ج. $\bar{\tau} = F_*(\tau)$ د. $\bar{\tau} = \text{sgn } F \tau$

۸. بردارهای $v = (-1, 1, 2)$ و $w = (1, 0, 1)$ مماس بر E^3 در $p = (1, -1, 1)$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنید F ایزومتري سوپرگردان باشد. در اینصورت $F_*(V_p) \cdot F_*(W_p)$ کدام است؟

الف. ۶ ب. -۶ ج. -۱ د. ۱

۹. دو خم $\alpha, \beta: I \rightarrow E^3$ با تنیدی دلخواه مفروضند. تحت چه شرایطی دو خم فوق قابل انطباقند؟

الف. $v_\alpha = \pm v_\beta, k_\alpha = \pm k_\beta, \tau_\alpha = \pm \tau_\beta$

ب. $v_\alpha = v_\beta > 0, k_\alpha = \pm k_\beta, \tau_\alpha = \pm \tau_\beta$

ج. $v_\alpha = \pm v_\beta, k_\alpha = k_\beta, \tau_\alpha = \pm \tau_\beta$

د. $v_\alpha = v_\beta > 0, k_\alpha = k_\beta > 0, \tau_\alpha = \pm \tau_\beta$

۱۰. فرض کنید E_1, E_2 و E_3 یک میدان سه وجهی برار روی $M \subset E^3$ باشد. کدام گزینه نادرست است؟

الف. $d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$ ب. $d\omega_{12} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}$

ج. $\omega_{12} \wedge \theta_1 + \omega_{23} \wedge \theta_2 = 0$ د. $d\omega_{12} = \omega_{12} \wedge \omega_{31}$

۱۱. فرض کنید θ_1 و θ_2 فرمهای دوگان E_1 و E_2 روی $M \subset E^3$ و K و H خمیدگی‌های گاوسی و متوسط M باشند. کدام گزینه نادرست است؟

الف. $\omega_{12} \wedge \omega_{23} = -k\theta_1 \wedge \theta_2$ ب. $d\omega_{12} = -k\theta_1 \wedge \theta_2$

ج. $\omega_{12} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_{23} = 2H\theta_1 \wedge \theta_2$ د. $\omega_{12} \wedge \omega_{23} = k\theta_1 \wedge \theta_2$

۱۲. عبارت زیر در مورد کدامیک از رویه‌ها صدق نمی‌کند؟ «نقطه‌ای وجود دارد که در آن، خمیدگی گاوسی k ، اکیدا مثبت است»

الف. کره ب. چنبره ج. بیضیگون د. استوانه

۱۳. رویه دورانی $X(u, v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$ را در نظر می‌گیریم که، $g'' + h'' = 1$ کدام گزینه نادرست است؟

الف. $F = 0$ ب. $k = \frac{h''}{h}$ ج. $G = h''$ د. $E = 1$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضوعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۵ دقیقه تشریحی ۶۵ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۴. فرض کنید P نقطه‌ای از رویه $M \subset E^3$ باشد، بطوریکه $K(p) < 0$ است. کدام گزینه درست است؟

الف. در P امتداد مجانبی وجود ندارد.

ب. در P دقیقاً یک امتداد مجانبی وجود دارد.

ج. در P دقیقاً دو امتداد مجانبی وجود دارد.

د. در P امتداد مجانبی وجود دارد، اگر P نقطه هامنی باشد.

۱۵. کدامیک از رویه‌های زیر «هموار» است؟

الف. صفحه و کره ب. استوانه و مخروط ج. کره و استوانه د. صفحه و استوانه

۱۶. فرض کنید $F: M \rightarrow N$ یک نگاشت رویه‌ها و ξ و η فرم‌هایی روی N باشند. کدام گزینه درست است؟

الف. $F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge F^*\eta$ ب. $F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge \eta + \xi \wedge F^*\eta$

ج. $F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge \eta - \xi \wedge F^*\eta$ د. $F^*(\xi \wedge \eta) = -F^*\xi \wedge F^*\eta$

۱۷. فرم ϕ روی یک رویه $M \subset E^3$ را بسته مینامند، هرگاه $d\phi = 0$ باشد. همچنین فرم ϕ را کامل مینامند هرگاه بازای

یک فرم ψ داشته باشیم $\phi = d\psi$. کدام گزینه نادرست است؟

الف. هر فرم کامل، بسته است. ب. هر 0 - فرم کامل است.

ج. توابع ثابت، 0 - فرم‌های بسته‌اند. د. روی رویه $M \subset E^3$ هر 2 - فرم بسته است.

۱۸. با توجه به تعریف بسته‌بودن یک فرم در تست شماره ۱۷، کدامیک از فرم‌های زیر بسته نیست؟

الف. $\phi = ydx + xdy$ ب. $\phi = e^{xy} dx dy dz$

ج. $\phi = xdx dy + ydy dz + zdx dz$ د. $\phi = x dy dz + y dz dy + z dx dy$

۱۹. فرض کنید $V = xU_1 - y^2U_3$ و $f = x^2y + z^3$. در اینصورت $V[V[f]]$ کدامست؟

الف. $2x^2y - 3y^2z^2$ ب. $4x^2y + 6y^2z$

ج. $4y^2x - 6yz^2$ د. $4x^2y - 6y^2z$

۲۰. فرض کنید γ یک میدان برداری متوازی روی خم α باشد. کدام گزینه درست است؟

الف. $\gamma = 0$ ب. $\gamma' = 0$ ج. $\gamma'' = 0$ د. $\gamma' = 0$ و $\gamma'' \neq 0$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضوعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۵۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۵ دقیقه تشریحی ۶۵ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

سوالات تشریحی

۱. ثابت کنید بازای هر تابع دیفرانسیل پذیر f ، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 f & \cos f \sin f & \sin f \\ \sin f \cos f & \sin^2 f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس ایستاری یک میدان سه وجهی است. سپس فرمهای همبندی آن را محاسبه کنید.

۲. ثابت کنید خمیدگی گاوسی، یک تغییرپذیر ایزومتریک است. یعنی اگر $F: M \rightarrow \bar{M}$ یک ایزومتري باشد، آنگاه بازای

هر نقطه p از M داریم: $k(p) = \bar{k}(F(p))$

۳. ژئودزیکهای استوانه را بدست آورید.

۴. فرض کنید $M: g = c$ رویه‌ای در E^3 باشد. ثابت کنید میدان برداری گرادیان $\nabla g = \sum (\frac{\partial g}{\partial x_i}) u_i$ که فقط روی

نقاط متعلق به M در نظر گرفته شده است، یک میدان برداری قائم روی تمام رویه M است.

۵. اگر $C: E^3 \rightarrow E^3$ یک تبدیل متعامد باشد، ثابت کنید C یک ایزومتري از E^3 است.