

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۳۰

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. اگر دنباله $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ بر $[a, b]$ متعامد ساده نرمال باشد، آنگاه کدام رابطه برقرار است؟

الف. $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0$ ب. $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 1$

ج. $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \delta_{nm}$ د. $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = |b - a|$

۲. اگر f و تابع g نسبت به تابع وزن $w = w(x)$ بر بازه $[a, b]$ متعامد باشند آنگاه

الف. توابع $f_1 = f\sqrt{w}$ ، $g_1 = g\sqrt{w}$ متعامد ساده خواهند بود.

ب. توابع $f_1 = f\sqrt{w}$ ، $g_1 = g\sqrt{w}$ متعامد نرمال خواهند بود.

ج. توابع $f_1 = fw$ ، $g_1 = gw$ متعامد ساده خواهند بود.

د. توابع $f_1 = \sqrt{f}w$ ، $g_1 = \sqrt{g}w$ متعامد نرمال خواهند بود.

۳. اگر $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چند جمله ایها باشد که نسبت به تابع وزن $w(x)$ بر $[a, b]$ متعامد باشند، آنگاهدرمورد تعداد صفرهای $\varphi_n(x)$ بر بازه $[a, b]$ چه می توان گفت؟الف. هر $\varphi_n(x)$ دارای n صفر (نه الزاماً متمایز) در (a, b) است.ب. اگر $w(x) = 1$ ، آنگاه هر $\varphi_n(x)$ دارای n صفر (نه الزاماً متمایز) در (a, b) خواهد بود.ج. اگر $w(x) = 1$ ، آنگاه هر $\varphi_n(x)$ دقیقاً دارای n صفر متمایز در (a, b) خواهد بود.د. هر $\varphi_n(x)$ دقیقاً دارای n صفر متمایز در (a, b) است.۴. درمورد دنباله چند جمله ایهای لژاندر $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ کدام گزاره صحیح نیست؟الف. $P_{pk+1}(x)$ فقط شامل جملات از توان فرد x است. $(n = pk + 1)$ ب. $P_{pk}(x)$ فقط شامل جملات از توان فرد x است. $(n = pk)$ ج. به ازای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $P_n(1) = 1$ د. به ازای هر $n = 1, 3, 5, \dots$ ، $P_n(0) = 0$ ۵. چند جمله ای لژاندر $p_n(x)$ جوابی از کدام معادله دیفرانسیل است؟

الف. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + (n^2 - n)y = 0$

ب. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + (n^2 + n)y = 0$

ج. $(1 - x^2)y'' + 2xy' + (n^2 - n)y = 0$

د. $(1 - x^2)y'' + 2xy' + (n^2 + n)y = 0$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۳۰

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد کل صفحات: ۵

$$ع. مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} u'' + \frac{1}{x^4} u = 0 \\ u(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$ جواب$$

الف. غیر بدیهی ندارد. ب. غیر بدیهی دارد. ج. ندارد. د. بینهایت دارد.

۷. صورت کورال الحاق معادله دیفرانسیل $xu'' + pu' + xu = 0$ ، در فاصله دلخواه $0 < a \leq x \leq b$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{الف. } (xu')' + xu &= 0. \\ \text{ب. } \left(\frac{u'}{x}\right)' + u &= 0. \\ \text{ج. } (xu')' + xu &= 0. \\ \text{د. } (xu')' + x^p u &= 0. \end{aligned}$$

۸. در مورد تابع گرین $G(x, \xi)$ کدام گزاره صحیح است؟

الف. تابعی مشتقپذیر بامشتقی پیوسته به ازای تمام مقادیر (x, ξ) است.

ب. مشتق آن تابعی پیوسته در $x = \xi$ است.

ج. جوابی از معادله $(PG')' + qG = 0$ است.

د. مقادیر مرزی آن در $x = a, x = b$ همواره مثبت اند.

۹. شرط خودالحاقی برای مسئله با مقدار اولیه $\begin{cases} Ly = -\lambda r(x)y \\ U_1(y) = 0, U_p(y) = 0 \end{cases}$ کدام است؟

الف. به ازای هر دو تابع مشتقپذیر u, v که در شرایط مرزی صدق کنند و داشته باشیم:

$$\frac{d}{dx} [p(x).W(x, u, v)] = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

ب. به ازای هر دو تابع مشتقپذیر u, v که در شرایط مرزی صدق کنند و داشته باشیم:

$$\int_a^b (v.Lu - u.Lv) dx = [P(x).W(x, u, v)]_a^b \neq 0$$

ج. به ازای هر دو تابع مشتقپذیر u, v که در شرایط مرزی صدق کنند و داشته باشیم:

$$p(x)W(x, u, v) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

د. به ازای هر دو تابع مشتقپذیر u, v که در شرایط مرزی صدق کنند و داشته باشیم:

$$\int_a^b (v.Lu - u.Lv) dx = 0$$

۱۰. کدام مسئله اشترم-لیوویل زیر خود الحاق نیست؟

$$\begin{aligned} \text{الف. } \begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases} & \quad \text{ب. } \begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} & \quad \text{ج. } \begin{cases} Ly = 0 \\ y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases} & \quad \text{د. } \begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۳۰

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد کل صفحات: ۵

۱۱. برای کدام مسئله با شرایط جدا شده زیر همه مقدار ویژه نامنفی هستند؟

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry \\ y(a) - y'(a) = 0 \\ y(b) + y'(b) = 0 \end{cases} \text{ ب.}$$

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry \\ y(a) + y'(a) = 0 \\ y(b) + ry'(b) = 0 \end{cases} \text{ الف.}$$

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry \\ y(a) - y'(a) = 0 \\ y(b) - y'(b) = 0 \end{cases} \text{ د.}$$

$$\begin{cases} Ly = -\lambda ry \\ y(a) + y'(a) = 0 \\ y(b) - y'(b) = 0 \end{cases} \text{ ج.}$$

۱۲. برای تابع $f(x) = |x|$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ دنباله ضرایب سینوسی b_n از سری فوریه در چه شرطی صدق می کنند؟

$$\text{الف. } \forall n, b_n = 0 \quad \text{ب. } \forall n: b_n = a_n \quad \text{ج. } \forall n: b_n = \frac{-4}{\pi n^2} \quad \text{د. } \forall n: b_n = \frac{-4}{\pi n^2} \text{ فرد}$$

۱۳. چند جمله ایهای متعامد لاگر $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به کدام تابع وزن و بر چه بازه ای متعامدند؟الف. تابع وزن $w(x) = 1$ و بر فاصله $(0, +\infty)$ ب. تابع وزن $w(x) = x$ و بر فاصله $(-\infty, +\infty)$ ج. تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ و بر فاصله $(0, +\infty)$ د. تابع وزن $w(x) = e^x$ و بر فاصله $(0, +\infty)$ ۱۴. سری فوریه $S(x)$ از تابع $f(x) = \begin{cases} 2-x, & -1 \leq x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ چه وضعی دارد؟الف. واگراست. ب. ناپیوسته است. ج. همگرا به ۲ است. د. همگرا به $\frac{1}{2}$ است.۱۵. اگر یک سری تابعی به صورت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x) = T(x)$ در میانگین روی بازه (a, b) به تابع f همگرا شود آنگاه:

$$\int_a^b (S(x) - T(x)) dx = 0 \quad \text{الف.}$$

$$\left(\int_a^b (S(x) - T(x)) dx \right)^2 = 0 \quad \text{ب.}$$

ج. $S(x) = T(x) = f$ سری فوریه $\forall x \in (a, b)$

$$\left| \int_a^b (S(x) - T(x)) dx \right| = 0 \quad \text{د.}$$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۳۰

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۶. اگر بدانیم $x^p = \frac{\pi^p}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \cos nx$, $\forall -\pi < x \leq \pi$, آنگاه از اتحاد پارسوال حاصل سری عددی

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ برابر کدام گزینه خواهد بود؟

ب. $\frac{\pi^3}{10} - \frac{\pi^2}{3}$

الف. $\frac{\pi^5}{10} - \frac{\pi^3}{12}$

د. $\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^2}{15}$

ج. $\frac{\pi^5}{12} - \frac{\pi^2}{6}$

۱۷. انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ کدام است؟

ب. $f(x) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Sx \cdot \sin S}{S} dS$

الف. $f(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos Sx \cdot \cos S}{S} dS$

د. $f(x) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos Sx \cdot \sin S}{S} dS$

ج. $f(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Sx \cdot \cos S}{S} dS$

۱۸. سری فوریه سینوسی نیم دامنه تابع $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

ب. $S(x) = \sin \frac{x}{2}$

الف. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{nx}{2}$

د. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{nx}{2}$

ج. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{nx}{2}$

۱۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل جزئی همگن $3Z_x - Z_y + 2Z = 0$ کدام است؟

الف. f هر تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه، $Z(x, y) = e^{\frac{3}{2}x} f(3x - y)$

ب. f هر تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه، $Z(x, y) = e^{2x} f(2x - 3y)$

ج. f هر تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه، $Z(x, y) = e^{-\frac{2}{3}x} f(-x - 3y)$

د. f هر تابع دیفرانسیل پذیر دلخواه، $Z(x, y) = e^{\frac{x}{2}} f(x - 3y)$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۳۰

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۲۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل جزئی $x z z_x + y z z_y = -(x^p + y^p)$ از روش لاگرانژ کدام است؟

$$F\left(\frac{x}{y^p}, x^p + y^p + z^p\right) = 0 \quad \text{ب.}$$

$$F\left(\frac{y}{x}, x^p + y^p + z^p\right) = 0 \quad \text{الف.}$$

$$F\left(\frac{y}{x^p}, x^p + y^p + z^p\right) = 0 \quad \text{د.}$$

$$F\left(\frac{y}{x}, x^p + y^p + z^p\right) = 0 \quad \text{ج.}$$

سوالات تشریحی:

۱. هرگاه $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چند جمله ای های متعامد بر (a, b) باشد، ثابت کنید هر چند جمله ای دلخواه از درجه m - مانند Q_m را می توان به شکل زیر بر حسب ترکیب خطی $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ بسط داد:

$$Q_m = \sum_{K=0}^m C_K \varphi_K, \quad C_K = \frac{(Q_m, \varphi_K)}{\|\varphi_K\|^2}, \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots$$

۲. تابع گرین و جواب مسئله مقدار مرزی را بیابید

$$\begin{cases} u'' = 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases}$$

۳. سری فوریه کامل (سینوسی و کسینوسی) تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ را بیابید و بکمک آن حاصل

سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n^2 - 1}$ را بیابید.

۴. مقدار انتگرال ناسره $\int_0^{\infty} \frac{\sin S(K-x) + \sin Sx}{S} dS$ ($K = \text{عدد ثابت و مثبت}$) را به عنوان تابعی از x ، بکمک

انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < k \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ بیابید.

۵. جوابهایی از معادله $u_{xy} + 4u_{xx} = 0$ را که به شکل حاصلضرب $u(x, y) = X(x).Y(y)$ باشند، بیابید.