

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ نمره تشریحی ۶۰ نمره

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۵

۱. فرض کنید  $X$  مقادیر ۱، ۰ و -۱ را به ترتیب با احتمالهای  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{4}$  بپذیرد و  $Y = |X|$  در این صورت داریم:

گزینه صحیح کدام است؟

الف.  $\rho(x, y) \neq 0$  و  $X$  و  $Y$  وابسته نمی باشند

ب.  $\rho(x, y) = 0$  و  $X$  و  $Y$  مستقل اند

ج.  $\rho(x, y) \neq 0$  و  $X$  و  $Y$  وابسته می باشند.

د.  $\rho(x, y) = 0$  و  $X$  و  $Y$  وابسته می باشند.

۲. عبارت  $Cov[E(X|Y), Y]$  با کدامیک از عبارتهای زیر برابر است.

الف.  $E(X|Y)$  ب.  $Cov(X, E(X))$  ج.  $Cov(X, Y)$  د.  $V(X)$

۳. در مدل رگرسیونی  $Y_i = a + bx_i + E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) با فرض  $\bar{x} = 2$  و  $S_x^2 = 2$  واریانس  $(Var(\hat{a}))\hat{a}$  برابر است با:

الف.  $\sigma^2$  ب.  $\frac{\sigma^2}{10}$  ج.  $\frac{3\sigma^2}{10}$  د.  $\frac{3\sigma^2}{10}$

۴. با فرض  $\bar{x} = 422$ ،  $\bar{y} = 2/876$ ،  $S_x^2 = 4349/6$ ،  $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 12375/7$  و  $S_{xy} = 23/901$  معادله خط

رگرسیونی برابر است با:

الف.  $\hat{y} = 0/557 + 0/0549x$  ب.  $\hat{y} = 0/0549x$

ج.  $\hat{y} = 0/0549 + 0/557x$  د. هیچکدام

۵. برای چگالی  $f(x, y) = \frac{2}{n(n+1)}$  ( $x = 1, 2, \dots, n; y = 1, 2, \dots, x$ ) مقدار  $E(X|Y)$  برابر است با:

الف.  $\frac{x+1}{2}$  ب.  $\frac{y+1}{2}$  ج.  $\frac{3x-n-4}{2}$  د.  $\frac{3Y-n-4}{2}$

۶. گزینه نادرست کدام است؟

الف. در مدل رگرسیونی خطی ساده  $SS_T$  تغییرپذیری نسبت به معدل را می سنجد و درجه آزادی آن برابر  $n-1$  می باشد.

ب. در مدل رگرسیونی خطی ساده  $SS_T$  تغییرپذیری نسبت به معدل را می سنجد و درجه آزادی آن برابر  $n-2$  می باشد.

ج. در مدل رگرسیونی خطی ساده  $SS_E$  تغییرپذیری خطاها را به علت پیش بینی می سنجد و درجه آزادی آن  $n-2$  می باشد.

د. در مدل رگرسیونی خط ساده  $SS_R$  تغییرپذیری به علت رگرسیون با تغییر در  $x_i$  ها را می سنجد و درجه آزادی آن یک می باشد.

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تئوری نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

۷. برای مدل خطی ساده  $y_i = c + b(x_i - \bar{x}) + E$  داریم که کدامیک از عبارات زیر نادرست است

الف.  $\hat{C} \sim N(C, \frac{\sigma^2}{n} (1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}))$  ب.  $\hat{b} \sim N(b, \frac{\sigma^2}{n s_x^2})$

ج.  $\hat{C} \sim N(C, \frac{\sigma^2}{n})$  د.  $\hat{a} \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n} (1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}))$

۸. تصویر برداری  $u = (1, 2, 3, 4)'$  روی بردار  $v = (1, 1, 1, 1)'$  کدام است.

الف.  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})'$  ب.  $(5, 5, 5, 5)'$

ج.  $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4})'$  د.  $(1, 1, 1, 1)'$

۹. دو بردار  $u = (1, 2, 3)'$  و  $v = (1, -2, 3)'$  با کدام یک از بردارهای زیر مستقل نمی باشند.

الف.  $(0, 0, 4)'$  ب.  $(2, 0, 6)'$  ج.  $(2, 0, 0)'$  د.  $(3, 0, 2)'$

۱۰. در مدل خطی  $y_i = a + bx_i + E_i$  با فرض  $b = 0$ ، برآورد کمترین مجموع توانهای دوم خطا برابر است با:

الف.  $SS_R$  ب.  $SS_T$  ج.  $SS_E$  د. هیچکدام

۱۱. ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$  یک ماتریس

الف. همیشه نامنفی است ب. همیشه مثبت است ج. همیشه منفی است د. موارد الف و ب

۱۲. ماتریس کواریانس  $(\sum \hat{a}) \hat{a}$  در مدل خطی  $(C_N)Y = Xa + E$  برابر است با:

الف.  $\sigma^2(X'X)$  ب.  $(X'X)^{-1}$  ج.  $\sigma(X'X)$  د.  $\sigma^2(X'X)^{-1}$

۱۳. در مدل رگرسیونی دو گانه  $Y = a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 + E_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) در صورتیکه عضو اول قطرماتریس  $(X'X)^{-1}$  برابر  $\frac{1}{6}$  باشد همچنین مقدار  $\hat{\sigma}^2 = 0.11898$  یک فاصله اطمینان ۹۰٪ برای  $a_1$  برابر است با

$(t_{0.95}(6) = 1.94)$

الف.  $(-0.388, 0.155)$  ب.  $(-0.54, 0.75)$

ج.  $(0.03, 0.928)$  د. هیچکدام

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تئوری نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۴. در مدل خطی چندگانه  $Y = Xa + E$  با فرض اینکه  $H_0: Ma = 0$  درست باشد و  $E \sim N(0, \sigma^2 I)$  (یا مدل  $C_N$ ) برآورد کمترین توانهای دوم  $\sigma^2$  برابر است با:

الف.  $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^2}{n - k}$   
 ب.  $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^2}{n - k - h}$   
 ج.  $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^2}{n - k + h}$   
 د.  $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^2}{n - k - h}$

۱۵. در مدل خطی چندگانه همخطی یعنی اینکه

الف. ستونهای ماتریس  $X$  مستقل باشندالف. ستونهای ماتریس  $X$  مستقل باشندب. ستونهای ماتریس  $X$  مستقل نباشندج. برآوردیاب بردار  $a$  یکتا خواهد بود

۱۶. فرض می‌کنیم بردار تصادفی  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  دارای مؤلفه‌های مستقل با واریانس مشترک  $\sigma^2$  باشند. در این صورت  $\sum Y$  برابر است با:

الف.  $I_n$   
 ب.  $\sigma^2 I_n$   
 ج.  $\sigma^2 I_n$   
 د.  $O$  (ماتریس صفر)

۱۷. در مدل خطی ساده نظیر سؤال ۷ گزینه نادرست کدام است؟

الف. در مدل خطی رگرسیونی ساده جفت  $(\hat{b}, \hat{c})$  مستقل‌اند.ب. در مدل خطی رگرسیونی ساده جفت  $(\hat{b}, S^2)$  مستقل‌اند.ج. در مدل خطی رگرسیونی ساده جفت  $(\hat{a}, \hat{b})$  مستقل نیستند.د. در مدل خطی رگرسیونی ساده جفت  $(\hat{c}, \hat{S})$  مستقل نیستند.۱۸. فرض کنید  $2X + Y + 1 = 0$  ضریب همبستگی  $X$  و  $Y$  برابر است با:

الف. صفر  
 ب. یک  
 ج.  $-1$   
 د.  $\frac{1}{2}$

۱۹. گزینه ناصحیح کدام است؟

الف. ناهمبستگی  $\Rightarrow$  استقلالب. ناهمبستگی  $\Rightarrow$  ناوابستگیج. استقلال  $\Rightarrow$  ناهمبستگید. ناوابستگی  $\Rightarrow$  ناهمبستگی۲۰. زاویه میان دو بردار  $u = (1, 1, -1, 1)'$  و  $v = (1, 0, 0, 1)'$  برابر است با:

الف.  $\frac{\pi}{4}$   
 ب.  $\frac{\pi}{2}$   
 ج.  $\frac{\pi}{3}$   
 د.  $\frac{\pi}{6}$

تعداد سؤال: هفتاد و پنج - تشریحی: ۵

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی: ۶۰ دقیقه تشریحی: ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تئوری نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۵

## سوالات تشریحی

۱. بردار تصادفی  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$  را با تابع مولد گشتاور زیر در نظر می‌گیریم.

$$M_Y(t) = \frac{1}{\rho} \exp \frac{1}{\rho} (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1 t_3 + t_2 t_3) + \frac{1}{\rho} \exp \frac{1}{\rho} (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1 t_2 + t_1 t_3)$$

الف. نشان دهید که چگالی بردار تصادف  $Y$  آمیخته‌ای از دو چگالی نرمال است.ب. نشان دهید که  $Y_1, Y_2, Y_3$  هر سه دارای چگالی نرمال استاندارد هستند.ج. آیا ترکیب خطی  $Y_1 - Y_2$  نرمال است چرا؟۲. در مدل رگرسیون  $Y_i = a + bx_i + E_i$  با فرض  $b = 0$  و نرمال بودن خطاها، نشان دهید

$$\frac{SS_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

۳. هرگاه رگرسیون  $Y$  روی  $X$  یک تابع خطی به صورت

$$d(x) = a + bx$$

باشد، ثابت کنید

$$E(Y|X) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$$

$$E(Var(Y|X)) = \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

۴. متغیرهای تصادفی  $Y_1, Y_2, Y_3$  دارای میانگین مشترک ۲ و واریانس ۱ می‌باشند و داریم  $\sigma_{12} = -1$  و  $\sigma_{13} = 1$  و

$$U = [U_1, U_2]'$$
 بردار میانگین و ماتریس کواریانس بردار تصادفی  $\begin{cases} U_1 = 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1 \\ U_2 = Y_1 - Y_2 - Y_3 + 2 \end{cases}$  فرض کنید  $\sigma_{23} = 0$

را پیدا کنید.

نام درس: رگرسیون

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۲۱۸

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۵

۵. مدل خطی زیر را در نظر می گیریم

$$(C_N): Y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + E; E \sim N(0, \sigma^2)$$

یافته های یک نمونه تصادفی  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$  با میانگین  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)'$  در جدول زیر داده شده است.

$y$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
۰	۱	-۱	۰
۱	۰	۰	۱
-۱	۱	۰	۰
۲	۱	۱	۰

فرض خطی  $H_0: 3a_1 - 2a_2 - a_3 = 0$  را بامیان  $\alpha = 0.05$  بیازمائید.

$$F_{0.95}(1,1) = F_{0.95}(1,1)$$