

نام درس: فرایند تصادفی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۳۰۶-۲۵۰۱۲۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶۰ تکمیلی - تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ نمره تشریحی ۶۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

۱. اگر X دارای توزیع نمائی با پارامتر λ باشد و $p[X > S + t | X > S] = p[x > t] = e^{-\lambda t}$ باشد پارامتر توزیع برابر با:

- الف. ۷. ب. $\lambda + \nu$ ج. $\lambda + \mu$ د. ۳

۲. اگر تابع مولد احتمال های X به صورت $\varphi_X(s) = E[S^x]$ تعریف شود و Y, X دو متغیر مستقل باشند $\varphi_{X+Y}(s)$ برابر با:

- الف. $\varphi_X(s) + \varphi_Y(s)$ ب. $\varphi_X(\sqrt{s})\varphi_Y(s)$ ج. $\varphi_X(s)\varphi_Y(s)$ د. هیچکدام

۳. در فرایند پواسن $\{N(t), t \geq 0\}$ با پارامتر λ مقدار $p[N(t) - N(s) = 0]$ برابر با:

- الف. $e^{-\lambda}$ ب. e ج. $e^{-\lambda s}$ د. $e^{-\lambda(s-t)}$

۴. در فرایند پواسن ضریب همبستگی بین N_s, N_t از رابطه N_s, N_t بدست آید $(s < t)$ اگر اندیس مربوط به فرایند N_t چهار برابر شود همبستگی بین N_s, N_t برابر شود

- الف. دو برابر می شود. ب. نصف می شود. ج. تغییر نمی کند. د. $\frac{1}{4}$ می شود.

فاصله نامتناهی	۱-۲	۳-۴	۵-۶	۷-۸
تعداد وقوع	۵	۳	۲	۱

۵. اگر داشته باشیم مقدار λ برای فرایند پواسن برابر با:

- الف. ۵/۵ ب. ۱ ج. ۱/۵ د. ۲

۶. فرایند حرکت براوانی کدام ویژگی زیر را ندارد؟

- الف. مانای اکید نیست. ب. مانای وسیع نیست. ج. الف و ب د. گاهی مانا و گاهی وسیع

۷. کدام یک از توزیع های آماری زیر فاقد حافظه نیست؟

- الف. هندسی ب. نمائی منفی ج. نرمال د. هندسی و نمائی منفی

۸. اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک دنباله ای از توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, \theta)$ باشند و $N(t)$ مستقل از X_i ها و دارای توزیع دو

جمله ای با پارامتر n, θ باشد امید ریاضی $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ برابر با:

- الف. $n\theta^2$ ب. $n\theta$ ج. $\frac{n\theta}{2}$ د. $\frac{n\theta}{2}$

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶۰ - تشریحی: ۶

نام درس: فرایند تصادفی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۳۰۶-۲۵۰۱۲۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ نمره تشریحی ۶۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

* اگر زنجیر مارکوف $\{X_n, n \geq 1\}$ دارای ماتریس تغییر وضعیت p و فضای حالت $S = \{1, 2, 3\}$ و توزیع آغازین $\pi_0 = (0/4, 0/2, 0/4)$ باشد به سؤالات ۹، ۱۰ و ۱۱ جواب دهید.

$$p = \begin{bmatrix} 0/7 & 0 & 0/3 \\ 0 & 0/5 & 0/5 \\ 0/2 & 0/3 & 0/5 \end{bmatrix}$$

۹. $p[X_{n+1} = 2 | X_n = 2]$ برابر با:

- الف. ۵/۰ ب. ۰ ج. ۳/۰ د. ۷/۰

۱۰. $p[X_1 = 2]$ برابر با:

- الف. ۳۳/۰ ب. ۲۲/۰ ج. ۱۱/۰ د. صفر

۱۱. $P_{11}^{(2)}$ برابر با:

- الف. ۵۵/۰ ب. ۴۵/۰ ج. ۳۵/۰ د. ۲۵/۰

۱۲. در گام برداری تصادفی اگر X_p دارای توزیع زیر باشد

X_p	-۲	-۱	۰	۱	۲
$p[X_p = x_p]$	q^2	$2qr$	$2pq + r^2$	$2pr$	p^2

مقدار $p(X_p = 2) + p(X_p = -2)$ برابر با:

- الف. $p + q$ ب. $p + q^2$ ج. $p^2 + q$ د. $1 - 2pq$

۱۳. در گام برداری تصادفی ساده شرط بازگشتی برای وضعیت صفر کدام است؟

- الف. $p = q = \frac{1}{2}$ ب. $p = \frac{1}{3}$ ج. $q = \frac{1}{3}$ د. $p = q \neq \frac{1}{2}$

۱۴. اگر وضعیت y حالتی بازگشتی باشد کدام مورد درست است؟

- الف. $p(T_y < \infty) = 0$ ب. $p(T_y < \infty) = 1$ ج. $p(T_y < \infty) < 1$ د. $p(T_y < \infty) > 0$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۶

نام درس: فرایند تصادفی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۳۰۶-۲۵۰۱۲۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد کل صفحات: ۵

۱۵. اگر X_1 دارای توزیع X_1 باشد تابع مولد احتمال متناظر با X_1 کدام است؟

 X_1

۰

۱

۲

 $p[X_1 = x_1]$ $\frac{1}{4}$

۰

 $\frac{3}{4}$

$$\varphi(s) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}s^2 \quad \text{ب.}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{4} + s + \frac{3}{4}s^2 \quad \text{الف.}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}s \quad \text{د.}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{4} + s \quad \text{ج.}$$

۱۶. در سؤال ۱۵ احتمال انفراس برابر با:

۱. د

ج. $\frac{3}{2}$

ب. صفر

الف. $\frac{1}{4}$ ۱۷. زنجیر ارنفست با فضای حالت $\{0, 1, 2, \dots, d\}$ و توزیع مانای (π) دارای توزیع:

د. دو جمله‌ای

ج. فوق هندسی

ب. پواسن

الف. هندسی

۱۸. برای زنجیری با $S = \{0, 1\}$ و $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ مقدار $P[Y_1 = 1]$ برابر با:

د. $\frac{1-\beta}{1-\alpha}$ ج. β ب. $1-\alpha$ الف. α ۱۹. برای زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با ویژگی تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت اگر $\pi(x)$ دارای توزیعباشد مقدار $m(x)$ برای $x = 3$ برابر با:

x	۰	۱	۲	۳
$\pi(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

۱. د

ج. $\frac{8}{3}$

ب. ۸

الف. ۴

۲۰. در سؤال ۱۸ اگر $P_{..}^{(n)} = \frac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\beta + \alpha}$ باشد $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{..}^{(n)}$ برابر با:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} \quad \text{د.}$$

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \text{ج.}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{ب.}$$

الف. ۱

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۶

نام درس: فرایند تصادفی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۳۰۶-۲۵۰۱۲۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

سوالات تشریحی

۱. الف: اگر $x = 0, 1, 2, \dots$ و $f(x) = pq^x$ نشان دهید که $P[X \geq S+t | X \geq S] = P[X \geq t]$

ب: نشان دهید که $E(x) = E[E(X | y)]$

۲. فرایند پوانسون را تعریف کنید و نشان دهید که:

$$\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda s, \quad (0 \leq s < t)$$

۳. فرض کنید $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر با فضای حالت $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ، توزیع آغازین $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ و ماتریس تغییر وضعیت P باشد

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

الف. مطلوب است $P[X_3 = 2, X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0]$

ب. مطلوب است $P^2 = P \times P$

ج. P_{12}^2 و P_{22}^2

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۶

نام درس: فرایند تصادفی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۵۰۱۲۱-۲۴۱۳۰۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۴. برای زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با $S = \{0, 1, 2, 3\}$ توزیع آغازین و

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

الف. مطلوبست توزیع X_1 راب. برای توزیع X_1 احتمال انقراض را حساب کنید.ج. $\varphi(s)$ را برای X_1 بدست آورید.

۵. الف. برای زنجیر مارکف با ماتریس وضعیت $P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$ توزیع ایستائی را حساب کنید.

ب. برای زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ ، $S = \{0, 1, 2, 3\}$ و $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ مطلوبست $f_{..} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

۶. Q_{xy} در فرایند زاد و مرگ به کمک نرخهای زایش و مرگ چگونه محاسبه می شود؟