

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل  
رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی ۱۱۱۱۰۵۱

کد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: ---

پیامبر اعظم (ص): روزه سیر آتش جهنم است.

۱. یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل  $u'' = \frac{2u}{t^2}$ ،  $t > 0$  برابر است با

الف.  $u(t) = t^2$  ب.  $u(t) = -t^2$  ج.  $u(t) = \frac{1}{t^2}$  د.  $u(t) = -\frac{1}{t^2}$

۲. در مورد دنباله  $x_n = \frac{1}{n}$  در فضای  $X = (0, 1]$  کدام گزینه صحیح است؟

الف. این دنباله بر  $X$  کوشی است در نتیجه همگراست.

ب. این دنباله بر  $X$  کوشی نیست پس واگراست.

ج. این دنباله بر  $X$  کوشی است ولی در  $X$  همگرا نیست.

د.  $X$  کامل است و  $\{x_n\}$  کوشی است پس این دنباله در  $X$  همگراست.

۳. هرگوی باز یا بسته در یک فضای خطی نرمدار همواره ..... است.

الف. چگال ب. محدب ج. فشرده د. کامل

۴. جواب منفرد معادله دیفرانسیل غیرخطی  $u' = \frac{-t + (t^2 + 4u)^2}{2}$  با شرط اولیه  $u(2) = -1$  برابر است با .....

الف.  $1 - t$  ب.  $\frac{t^2}{4}$  ج.  $\frac{-t^2}{4}$  د.  $1 + t$

۵. در مورد تابع  $g(t, u) = t|u|$  کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. تابع روی ناحیه‌ای که شامل  $(0, 0)$  باشد در شرط لپشیتز صدق می‌کند.

ب. تابع بر هر ناحیه شامل  $(0, 0)$  در شرط لپشیتز صدق می‌کند و مشتق جزئی آن نسبت به  $u$  به ازای  $t = 0$  وجود دارد.

ج. تابع بر هر ناحیه شامل  $(0, 0)$  در شرط لپشیتز صدق می‌کند و مشتق جزئی آن نسبت به  $u$  به ازای  $t = 0$  وجود ندارد.

د. تابع  $\frac{\partial g}{\partial u}$  پیوسته نیست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل  
رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی ۱۱۱۰۵۱

منبع: --

مجاز است.

استفاده از: --

گد سری سوال: یک (۱)

۶. در قضیه زیبور، شرط لازم برای وجود جواب یکتا برای مسئله با مقدار اولیه  
روی بازه  $\begin{cases} u'' + g(t)u' + h(t)u = 0 \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$

$J_1 \neq t_0 + a$  (ا  $a > 0$ ) کدام است؟

الف. توابع  $g(t)$  و  $h(t)$  بر  $J_1$  کراندار باشند.

ب. توابع  $g(t)$  و  $h(t)$  دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته باشند.

ج. توابع  $g(t)$  و  $h(t)$  بر  $J_1$  دارای مشتقات مرتبه اول کراندار باشند.

د. توابع  $g(t)$  و  $h(t)$  بر  $J_1$  پیوسته باشند.

۷. کدام ماتریس با  $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  متشابه است؟

الف.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  ب.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  ج.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  د.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۸. یک شرط لازم و کافی برای آنکه یک جواب ماتریسی  $\phi(t)$  از  $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$  یک ماتریس اصلی برای  $X'(t) = A(t)X$  باشد این است که .....

الف.  $w(t_0) \exp[\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds] = 0$  ,  $\forall t \in (r_1, r_2)$

ب.  $w(t_0) \exp[\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds] \neq 0$  ,  $\forall t \in (r_1, r_2)$

ج.  $w(t_0) \exp[\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds] = 0$  ,  $\exists t_0 \in (r_1, r_2)$

د.  $w(t_0) \exp[\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds] \neq 0$  ,  $\exists t_0 \in (r_1, r_2)$

۹. در چه صورت  $\exp[\int_{t_0}^t A(s) ds]$  جوابی از  $X' = A(t)X$  است؟

الف.  $A(t)$  متقارن باشد.

ب.  $A(t)$  ماتریسی غیر ثابت باشد.

ج.  $A(t)$  با یک ماتریس قطری متشابه باشد.

د.  $A(t)$  ,  $\int_{t_0}^t A(s) ds$  تعویض پذیر باشند

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی ۱۱۱۰۵۱

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

منبع: --

مجاز است.

استفاده از: --

گد سری سوال: یک (۱)

۱۰. ماتریس اصلی جواب های همگن دستگاه  
برابر است با .....  
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 + t \end{cases}$$

ب. 
$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 2e^t & -e^t \end{bmatrix}$$

الف. 
$$\begin{bmatrix} e^t & 2e^t \\ te^t & -e^t + 2te^t \end{bmatrix}$$

د. 
$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 2e^t & -e^t + 2te^t \end{bmatrix}$$

ج. 
$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 2e^t & 2te^t \end{bmatrix}$$

۱۱. در چه صورت تمام جواب های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه  $n$  ام همگن

$$L(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$
 وای  $(-\infty, +\infty)$  کراندارند؟

الف. قسمت حقیقی تمام ریشه های چند جمله ای مشخصه منفی باشد.

ب. قسمت حقیقی تمام ریشه های چند جمله ای مشخصه که چندگانگی آنها از یک بزرگتر است منفی باشد.

ج. قسمت حقیقی ریشه هایی از این چند جمله ای مشخصه که چندگانگی یک دارند نامثبت باشد.

د. هرگاه هم شرط (ب) و هم شرط (ج) همزمان برقرار باشند.

۱۲. چند جمله ای مشخصه کدام معادله دیفرانسیل پایدار است؟

ب. 
$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 2y'' + 6y' + 2y = 0$$

الف. 
$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' - y' - 2y = 0$$

د. 
$$y^{(3)} - 5y'' + 9y' - 5y = 0$$

ج. 
$$y^{(3)} + 5y'' + 9y' + 5y = 0$$

۱۳. در مورد جواب صفر معادله دیفرانسیل  $u'' - \frac{2u'}{t+1} + u = 0$  کدام گزینه صحیح است؟

ب. ناپایدار است.

الف. یکنواخت پایدار است.

د. قویاً پایدار است.

ج. مجانباً پایدار است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل  
رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی ۱۱۱۰۵۱

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: ---

۱۴. نقاط بحرانی دستگاه 
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\frac{g}{L} \sin u = 0 \end{cases}$$
 برابر است با .....

الف.  $(0, 2n\pi)$  ب.  $(0, n\pi)$  ج.  $(n\pi, 0)$  د.  $(0, 2n\pi)$

۱۵. تصویر فضای فاز جواب صفر معادله دیفرانسیل  $X' = AX$  که مقادیر ویژه نظیر آن  $\lambda_1, \lambda_2$  است و در رابطه  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  صدق می کند به چه صورت است؟

الف. گره ناسره مجانباً پایدار ب. گره ناسره ناپایدار

ج. نقطه زینی د. گره سره ناپایدار

۱۶. تصویر فضای فاز نقطه بحرانی  $(0, 0)$  دستگاه 
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$
 کدام است؟

الف. نقطه زینی ب. ناپایدار ج. مجانباً پایدار د. گره سره پایدار

۱۷. تصویر فضای فاز نقطه بحرانی دستگاه  $X' = AX$  که در آن  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  است چه نام دارد؟

الف. کانون پایدار یکنواخت ب. کانون ناپایدار

ج. مرکز د. کانون پایدار و مجانباً پایدار

۱۸. اگر به ازای هر  $t \in (a, b)$   $k(t) \leq 0$  باشد آنگاه در مورد تعداد صفرهای هر جواب نابديهی معادله  $u'' + k(t)u = 0$  بر فاصله  $(a, b)$  چه می توان گفت؟

الف. حداقل یک صفر دارد ب. حداکثر یک صفر دارد

ج. حداقل دو صفر دارد د. هیچ صفری بر  $(a, b)$  ندارد.

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی ۱۱۱۰۵۱

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سوال: یک (۱)

استفاده از: --

مجاز است.

منبع: --

۱۹. در مورد نقاط بحرانی دستگاه دو بعدی ولترا  

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_1 x_p \\ x_p' = -x_p + x_1 x_p \end{cases}$$
 کدام گزینه صحیح است؟

الف. نقطه (۰, ۰) یک نقطه زینی و لذا پایدار است.

ب. نقطه (۱, ۱) یک نقطه مرکز است.

ج. (۰, ۰) یک نقطه مرکز است.

د. (۱, ۱) یک نقطه زینی و لذا ناپایدار است.

۲۰. در مورد دور حدی دستگاه دو بعدی  

$$\begin{cases} x_1' = -x_p - x_1(x_1^2 + x_p^2 - 9) \\ x_p' = x_1 - x_p(x_1^2 + x_p^2 - 9) \end{cases}$$
 با مدار  $C: x_1^2 + x_p^2 = 9$  چه می توان گفت؟

الف. دور حدی  $C$  پایدار است.

ب. دور حدی  $C$  ناپایدار است.

ج. دور حدی  $C$  نیمه ناپایدار است.

د. دور حدی  $C$  نیمه پایدار است.

سوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره

۱. الف. قضیه وجودی پئانو را بیان کنید.

ب. لم جی آسکولی را بیان کنید.

۲. نشان دهید جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $u' = (6t \sin t - 7t)u$  که در آن  $T \geq 6$  ,  $t_0 \geq 0$  ,  $t \geq t_0 + T$  است،

مجاناً یکنواخت پایدار نیست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل  
رشته تحصیلی/گروه درس: ریاضی ۱۱۱۰۵۱

کد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: ---

۳. اگر قسمت حقیقی هر یک از مقادیر ویژه ماتریس ثابت  $A = (a_{ij})$  منفی باشد، آنگاه تمام جواب‌های معادله  $X' = AX$  مجانباً پایدار هستند.

۴. پایداری جواب صفر یا نقطه تعادل از دستگاه  $\begin{cases} x_1(t) \equiv 0 \\ x_2(t) \equiv 0 \end{cases}$  را بررسی کنید.  
 $\begin{cases} x_1' = -4x_2 - x_1''' \\ x_2' = 3x_1 - x_2''' \end{cases}$

۵. معادله دیفرانسیل اسکالر  $u'''' + k_1u'' + k_2u' + u = 0$  را در نظر بگیرید. نوع جواب صفر آن را از نظر پایداری معین کنید.  
(از تابع لیاپانوف استفاده کنید.)