

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: --

مجاز است.

منبع: --

پیامبر اعظم (ص): روزه سیر آتش جهنم است.

۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی K و $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک زیر مجموعه از عناصر V باشد آنگاه:

الف. مجموعه تمام حاصل جمع‌های عناصر X یک زیر فضای خطی V است.

ب. مجموعه $\{a_1 v_1, \dots, a_n v_n \mid a_i \in K\}$ یک زیر فضای خطی V است.

ج. مجموعه تمام ترکیب‌های خطی عناصر X یک زیر فضای خطی V است.

د. X یک زیر فضای خطی V است.

۲. فرض کنید V و W فضاهای برداری روی K از بعد متناهی باشند.

الف. اگر $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت از V در W باشد آنگاه برد f یک زیر فضای W است.

ب. اگر $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت از V در W باشد آنگاه هسته f یک زیر فضای V است.

ج. اگر $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی از V در W باشد، آنگاه V یک زیر فضای W است.

د. اگر $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی از V در W باشد، آنگاه هسته و برد f یک زیر فضای به ترتیب V و W می‌باشد.

۳. فرض کنید: $f: R^3 \rightarrow R^3$ نگاشتی باشد که با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌اند. کدام یک خطی است؟

الف. $f(x, y, z) = (\sin x, \cos x, \tan x)$

ب. $f(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c)$ که a و b و c اعداد ثابت غیر صفراند.

ج. $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + z)$

د. $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, \sqrt{y^2 + z^2})$

۴. فرض کنید V و W فضاهای برداری روی K و $f: V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی باشد.

الف. اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد آنگاه $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ یک پایه W خواهد بود.

ب. اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد آنگاه $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ یک پایه W خواهد بود.

ج. اگر f یک به یک و $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد آنگاه f پوشا نیز خواهد بود.

د. اگر f یک به یک و $\{v_1, \dots, v_n\}$ در V مستقل خطی باشند آنگاه مجموعه $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ در W مستقل خطی است.

۵. فرض کنید V فضای برداری توابع مشتق پذیر از $I = [a, b]$ به R باشد و D عملگر مشتق از V در V .

کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح اند؟

الف. جواب معادله دیفرانسیلی $D(f) = \lambda f'$ یک بردار ویژه D است.

ب. f یک بردار ویژه D است اگر f یک چند جمله‌ای از درجه n است.

ج. اگر λ یک مقدار ویژه D باشد، جواب معادله دیفرانسیلی $D = (f) = f' = \lambda f$ یک بردار ویژه D است.

د. f یک بردار ویژه D است هرگاه در رابطه $D(f') = \lambda f$ صدق کند.

۶. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی و $B = PAP^{-1}$ که P یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر است. آنگاه:

الف. مقادیر ویژه A و B یکی هستند. ب. مقادیر ویژه A و P یکی هستند.

ج. هر مقدار ویژه A یک مقدار ویژه B است. د. هر مقدار ویژه B یک مقدار ویژه A است.

۷. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ مقدارهای ویژه A باشند.

الف. اگر بردارهای ویژه متناظر به λ_i ها مستقل خطی باشند آنگاه λ_i ها نیز متمایزند.

ب. بردارهای ویژه متناظر به λ_i ها مستقل خطی اند اگر λ_i ها دو به دو متمایز باشند.

ج. بردارهای ویژه متناظر به λ_i ها وابسته خطی اند اگر λ_i ها دو به دو متمایز باشند.

د. نابسته بودن بردارهای ویژه A بستگی به متمایز بودن λ_i ها ندارد.

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی / کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: --

۸. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی از فضای برداری متناهی البعد V در فضای V باشد. آنگاه:

الف. ماتریس وابسته به T قطری شدنی است اگر مقادیر ویژه T متمایز باشد.

ب. ماتریس وابسته به T قطری شدنی است اگر و فقط اگر حاصل جمع بعدهاهای زیر فضاها و ویژه وابسته به هر مقدار ویژه برابر بعد V باشد.

ج. اگر ماتریس وابسته به T قطری شدنی باشد آنگاه T دقیقاً دارای $\dim V$ مقدار ویژه خواهد بود.

د. اگر T به اندازه $\dim V$ مقدار ویژه متمایز در k داشته باشد آنگاه ماتریس وابسته به T قطری شدنی نیست.

۹. فرض کنید A ماتریس وابسته به یک تبدیل خطی $f: V \rightarrow V$ در یک پایه مرتب باشد. آنگاه:

الف. چند جمله‌ای مینیم A چند جمله‌ای مشخص آن را ایجاد می‌کند.

ب. چند جمله‌ای مشخص A ، چند جمله‌ای مینیم A را ایجاد می‌کند.

ج. چند جمله‌ای مشخص A و چند جمله‌ای مینیم A هیچ رابطه مشخصی با یکدیگر ندارند.

د. درجه چند جمله‌ای مشخص می‌تواند از درجه چند جمله‌ای مینیم باشد.

۱۰. فرض کنید A ماتریس وابسته به یک تبدیل خطی $f: V \rightarrow V$ در یک پایه مرتب باشد. آنگاه:

الف. ماتریس A در چند جمله‌ای مشخص A صدق می‌کند.

ب. دترمینان A در چند جمله‌ای مشخص A صدق می‌کند.

ج. ماتریس A در چند جمله‌ای مشخص A صدق می‌کند ولی در چند جمله‌ای مینیم آن صدق نمی‌کند.

د. ماتریس A در چند جمله‌ای مینیم A صدق می‌کند ولی در چند جمله‌ای مشخص آن صدق نمی‌کند.

۱۱. فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد. آنگاه:

الف. ستون‌های ماتریس $\lambda I_n - A$ مستقل خطی‌اند.

ب. ستون‌های ماتریس $\lambda I_n - A$ وابسته خطی‌اند.

ج. رتبه ماتریس A و ماتریس $A - \lambda I_n$ برابرند.

د. رتبه ماتریس A کمتر از رتبه ماتریس $A - \lambda I_n$ است.

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. --- منبع: ---

۱۲. فرض کنید $f: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی و A ماتریس وابسته به f در یک پایه مرتب باشد.

الف. چند جمله‌ای مشخصه A بستگی به پایه انتخاب شده دارد.

ب. چند جمله‌ای مشخصه A مستقل از پایه انتخاب شده است.

ج. چند جمله‌ای مشخصه A ، بطور یکتایی A را مشخص می‌کند.

د. همواره می‌توان ریشه‌های چند جمله‌ای A را به دست آورد.

۱۳. فرض کنید $f: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی و λ یک مقدار ویژه و W زیر فضای پدیدآمده توسط بردار ویژه وابسته به λ باشد آنگاه:

الف. f عناصر W را به توی W می‌نگارد.

ب. f برخی عناصر W را به توی $V - W$ می‌نگارد.

ج. f همه عناصر W را به صفر می‌نگارد.

د. f هیچ عنصری از W را به صفر نمی‌نگارد.

۱۴. فرض کنید $f: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی و W و X دو زیر فضای V باشند که تحت f ناورداییند.

الف. $W \oplus X$ نیز تحت f ناورداست.

ب. $W \cup X$ یک زیر فضای ناوردا تحت f است.

ج. $W + X$ تحت f ناوردا نیست.

د. $W \cap X$ تحت f ناوردا است.

۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری و A ماتریس وابسته به یک نگاشت خطی $f: V \rightarrow V$ در یک پایه ثابت باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر کامل‌تر است.

الف. به کمک A می‌توان V را به صورت جمع مستقیمی از زیر فضاهای V نوشت.

ب. به کمک مقادیر ویژه A می‌توان V را به صورت جمع مستقیمی از زیر فضاهای V نوشت.

ج. به کمک مقادیر ویژه A می‌توان V را به صورت جمع مستقیمی از زیر فضاهای V نوشت و بعد هر یک را محاسبه نمود.

د. به کمک چند جمله‌ای مشخصه A می‌توان V را به صورت جمع مستقیمی از زیر فضاهای خطی نوشت و بعد هر یک از جمعوندها و تعداد آنها را نیز به دست آورد.

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. --- منیع: ---

۱۶. فرض کنید $f: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی و A ماتریس وابسته به f در یک پایه مرتب V باشد. کدام گزینه درست است؟

الف. A قطری شدنی است فقط اگر چند جمله‌ای می‌نیم آن را بتوان به عوامل خطی متمایز تجزیه کرد.

ب. A قطری شدنی است اگر و فقط اگر چند جمله‌ای می‌نیم آن را بتوان به عوامل درجه اول تجزیه کرد.

ج. A قطری شدنی است اگر چند جمله‌ای می‌نیم آن تحویل ناپذیر باشد.

د. A قطری شدنی است اگر چند جمله‌ای می‌نیم آن ریشه مکرر نداشته باشند.

۱۷. فرض کنید $f: V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی از فضای برداری متناهی البعد V روی K در V باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح هستند؟

الف. f را می‌توان به صورت مجموع یک نگاشت خطی قطری شدنی و یک نگاشت خطی پوچ توان نوشت.

ب. f را می‌توان به صورت مجموع یک نگاشت خطی قطری شدنی و یک نگاشت خطی پوچ توان نوشت مشروط بر این که

مقدارهای ویژه f به میدان K تعلق داشته باشند.

ج. f را می‌توان به صورت یکتایی به شکل مجموع یک نگاشت خطی قطری شدنی و یک نگاشت خطی پوچ توان نوشت.

د. f را می‌توان به صورت یکتایی به شکل مجموع یک نگاشت خطی قطری شدنی و یک نگاشت خطی پوچ توان نوشت مشروط

بر این که مقدارهای ویژه f به K متعلق باشند.

۱۸. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد روی R و d یک ضرب داخلی روی V باشد. کدام گزاره اطلاعات بیشتری

درباره V به دست می‌دهد؟

الف. برای V یک پایه وجود دارد.

ب. برای V یک پایه یکه‌ای وجود دارد.

ج. برای V یک پایه یکا متعامد وجود دارد.

د. برای V یک پایه متعامد وجود دارد.

نام درس: جبر خطی

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: ---

۱۹. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد روی R به همراه یک ضرب داخلی باشد. آنگاه:

الف. یک روش برای ساختن یک پایه متعامد از یک پایه داده شده وجود دارد.

ب. هر پایه V یک پایه متعامد است.

ج. یک روش برای ساختن یک پایه متعامد از یک پایه داده شده وجود دارد.

د. هیچ روشی برای ساختن یک پایه متعامد، از یک پایه دلخواه وجود ندارد.

۲۰. فرض کنید V یک فضای برداری متناهی البعد روی R و $f: V \times V \rightarrow R$ یک فرم دو خطی متقارن باشد. آنگاه

یک پایه مرتب $\{v_1, \dots, v_n\}$ برای V وجود دارد به طوری که برای هر $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$

الف. $f(x, x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j$ ب. $f(x, x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$

ج. $f(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ د. برای یک $k \leq n$ ، $f(x, x) = -x_1^2 - \dots - x_k^2$

سوالات تشریحی

بارم هر سؤال ۲ نمره

۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. می دانیم A یک نگاشت خطی از K^n در K^n تعریف می کند.

اولاً نشان دهید بردارهای متناظر به مقدار ویژه صفر در هسته A و بردارهای متناظر به مقدار ویژه غیر صفر در سایه A

قرار می گیرند.

ثانیاً نشان دهید A وارون پذیر است اگر و فقط اگر مقدار ویژه صفر نداشته باشد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: جبر خطی
رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۴۰

گد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. --- منبع: ---

۲. فرض کنید $f: R^5 \rightarrow R^3$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$(x, y, z, s, t) \rightarrow (x + 2y + z - s + 3t, x + 2y + 3z + s + t, 3x + 6y + 8z + s + 5t)$$

یک پایه برای هسته f بیابید. و به کمک آن بعد سایه f را نیز محاسبه کنید.

۳. فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های برحسب t و از درجه حداکثر n باشد. نشان دهید:

a. هر کدام از مجموعه‌های زیر پایه‌ای برای V هستند.

الف. $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, t^n\}$

ب. $\{1, (1-t), (1-t)^2, \dots, (1-t)^n\}$

b. بعد فضای V برابر $n+1$ است.

c. نشان دهید $W = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$ یک زیر فضای خطی V است.

d. نشان دهید بعد W برابر n است.

۴. فرض کنید V فضای برداری پدید آمده توسط $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ باشد.

الف. نشان دهید تابع $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)g(x)dx$ یک ضرب داخلی روی V تعریف می‌کند.

ب. نشان دهید مولدهای V دو به دو بر یکدیگر عمودند.

ج. برای هر عنصر مجموعه مولد V ، نرم آن را محاسبه کنید.

د. چگونه می‌توان این مجموعه را به یک مجموعه مولد یکا متعامد تبدیل کرد؟

۵. ماتریس $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است.

الف. چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه این ماتریس را بیابید.

ب. بدون محاسبه ماتریس وارون M ، مقادیر ویژه آن را به دست آورید.