



نام درس: آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی ۱۱۱۱۰۳۸ آمار ۱۱۱۱۰۸۷ آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

امام علی^(ع): برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف. در اعداد حقیقی خاصیت ارشمیدسی برقرار است.

ب. اصل کمال در مجموعه اعداد گویا برقرار است.

ج. هر زیر مجموعه ناتهی و از پایین کراندار اعداد حقیقی دارای انفییم می‌باشد.

د. بازه (۰, ۱) شمارش پذیر نیست.

۲. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. اگر $\{a_n\} \subseteq R^+$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}}$ ب. اگر $a_n = -n$ آنگاه $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ج. اگر $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cos n\pi$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ د. اگر $a_n = n[2 + (-1)^n]$ آنگاه $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ۳. اگر $\alpha = \inf A$ ، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟الف. $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in A, x < \alpha - \varepsilon$ ب. $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A, x < \alpha - \varepsilon$ ج. $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A, x < \alpha + \varepsilon$ د. $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \alpha + \varepsilon < x$ ۴. اگر $a_n = (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{2n+1}{n}$ ، مقدار $\overline{\lim} a_n + \underline{\lim} a_n$ کدام است

الف. ۳-

ب. ۵

ج. ۲

د. ۱-

۵. فرض کنید $E = Q \cap [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ آنگاه $\sup E$ در R برابر است با:

الف. ۲

ب. در R سوپریمم ندارد.ج. $\sqrt{5}$ د. عددی گویا کمتر از $\sqrt{5}$

۶. کدامیک از سریهای زیر واگراست؟

الف. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ ب. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ به ازای $p < 1$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آنالیز ریاضی ۱
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی ۱۱۱۱۰۳۸ آمار ۱۱۱۱۰۸۷ آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۷. کدام سری همگراست؟

الف. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

۸. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیرتهی و کراندار R باشند در اینصورت:

الف. $\inf(A \cap B) \leq \min\{\inf A, \inf B\}$ ب. $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$
ج. $\sup(A \cap B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$ د. $\inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\}$

۹. فرض کنید E مجموعه نقاطی از $[0, 1]$ باشد که در بسط اعشاری آنها فقط ۵ و ۲ ظاهر می شود آنگاه E :

الف. شمارش پذیر است. ب. فشرده است.

ج. در $[0, 1]$ چگال است. د. متناهی است.

۱۰. مجموعه اعداد گویا:

الف. بامتریک معمولی باز است ولی بسته نیست. ب. بامتریک گسسته هم باز است و هم بسته

ج. بامتریک معمولی بسته است ولی باز نیست. د. بامتریک گسسته باز است ولی بسته نیست.

۱۱. فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد آنگاه:الف. اگر $A \subseteq X$ همبند باشد آنگاه $f(A)$ نیز همبند است.ب. به ازای هر زیرمجموعه باز $O \subseteq X$ مجموعه $f(O)$ باز استج. اگر f یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز پیوسته استد. اگر $C \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه مجموعه $f^{-1}(C)$ فشرده است.

۱۲. کدامیک از گزاره های زیر نادرست است؟

الف. بازه $[0, 1]$ در R با متر گسسته همبند نیست.ب. اگر A همبند باشد و $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ، آنگاه B همبند است.ج. اگر A همبند باشد آنگاه \bar{A} نیز همبند است.د. اگر A_1, A_2 همبند باشند، آنگاه $A_1 \cup A_2$ همبند است.۱۳. هرگاه $A = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ آنگاه A° کدام است؟

الف. \emptyset ب. $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ج. Q د. $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$



نام درس: آنالیز ریاضی ۱	تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی ۱۱۱۱۰۳۸ آمار ۱۱۱۱۰۸۷ آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶	زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
کد سری سؤال: یک (۱)	آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗
استفاده از: —	مجاز است.

۱۴. هرگاه (M, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq M$ فشرده باشد و $B \subseteq M$ باز باشد، آنگاه..... فشرده است

الف. $B - A$ ب. $A \cap B$ ج. $A - B$ د. $A \cup B$

۱۵. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک باشد:

الف. هرگاه $A \subseteq M$ بسته و کراندار باشد آنگاه A فشرده است.

ب. هرگاه $A \subseteq M$ و $p \in M$ یک نقطه انباشتگی A باشد آنگاه هر همسایگی p فقط شامل تعداد متناهی نقطه از A است

ج. هر زیرمجموعه نامتناهی E از M دارای یک نقطه انباشتگی در M است

د. هر زیرمجموعه متناهی E از M بسته است.

۱۶. فرض کنید $A \subseteq R$ مجموعه ای نافشرده باشد آنگاه:

الف. اگر A بیکران باشد هرتابع پیوسته و کراندار بر A ماکسیمم دارد.

ب. اگر A کراندار باشد هرتابع پیوسته بر A پیوسته یکنواخت است.

ج. تابعی پیوسته و کراندار بر A موجود است که ماکسیمم ندارد.

د. هر تابع پیوسته بر A کراندار است.

۱۷. کدامیک از گزاره های زیر نادرست است؟

الف. اگر f در نقطه C از (a, b) دارای ماکسیمم یا مینیمم موضعی باشد، آنگاه $f'(c) = 0$

ب. برای توابع مختلط f قضیه هوپیتال برقرار نیست.

ج. هرگاه f بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد آنگاه f' بر $[a, b]$ ناپیوستگی ساده ندارد.

د. برای توابع مختلط f قضیه مقدار میانگین برقرار نیست.

۱۸. فرض کنید (X, d_x) و (Y, d_y) دو فضای متریک باشند و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد آنگاه:

الف. به ازای هر زیرمجموعه $B \subseteq Y$ داریم $(f^{-1}(B))^{\circ} \subseteq f^{-1}(B^{\circ})$

ب. f سوپریم و اینفیمم مقادیر خود را در نقطه ای از X می گیرد.

ج. هرگاه $A \subseteq X$ باز باشد آنگاه $f(A)$ نیز باز است.

د. به ازای هر زیرمجموعه $A \subseteq X$ داریم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

مجاز است.

استفاده از: —

کُد سری سؤال: یک (۱)

۱۹. اگر $c \in (a, b)$ و $f'(c) = A$ آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$ برابر است با:

د. $2A$ ج. A ب. $\frac{A}{2}$

الف. صفر

۲۰. تابع f بر $[*, 1]$ با تعریف $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & (x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1, m, n \in \mathbb{N}) \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$

ب. در تمام نقاط گویا پیوسته است.

الف. در تمام نقاط ناپيوسته است.

د. در تمام نقاط $[*, 1]$ پیوسته است.

ج. در تمام نقاط اصم پیوسته است.

« سوالات تشریحی »

(بارم هر سوال ۲ نمره می باشد)

۱- فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ آن است که:

الف. به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر عدد طبیعی n اگر $n \geq N$ آنگاه

$$a_n < a + \varepsilon$$

ب. به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر عدد طبیعی N عددی طبیعی مانند n موجود باشد به طوری که $n \geq N$ و $a_n > a - \varepsilon$

۲- الف. ثابت کنید در فضای متریک (M, d) ، اگر C فشرده باشد آنگاه C بسته است.

ب. صرفاً با استفاده از تعریف مجموعه فشرده و بدون استفاده از قضیه، ثابت کنید که $[*, 1]$ فشرده نیست.

۳- الف. فرض کنید f بر $[*, 1]$ پیوسته است، $f(*) = *$ و f' بر $(*, 1)$ موجود و متناهی است. اگر f' صعودی باشد، نشان دهید که

$$\text{تابع } g \text{ بر } (*, 1) \text{ با ضابطه } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ نیز صعودی است.}$$

ب. فرض کنید g بر R مشتق پذیر است و M ای وجود دارد که $|g'(x)| \leq M$. فرض کنید $f(x) = \varepsilon g(x) + x$ ثابت کنید به ازای

ε های مناسب f یک به یک است.

نام درس: آنالیز ریاضی ۱	تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی ۱۱۱۱۰۳۸ آمار ۱۱۱۱۰۸۷ آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶	زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
کد سری سؤال: یک (۱)	آزمون نمره منفی دارد <input type="radio"/> ندارد <input checked="" type="radio"/>
استفاده از: —	مجاز است.

۴- ثابت کنید هر زیر مجموعه نامتناهی و کراندار R^k دارای حداقل یک نقطه انباشتگی است. (قضیه بولتسانو- وایراشتراس)

۵- فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند و $f: X \rightarrow Y$ اگر $F \subseteq X$ فشرده و f بر F پیوسته باشد آنگاه f بر F پیوسته یکنواخت است.