

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

امام علی<sup>(ع)</sup>: برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. هرگاه  $f(x) = x^2 + x$  را بصورت ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های متعامد  $f_1(x) = 1$ ،  $f_2(x) = x - \frac{3}{4}$  و  $f_3(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}$  نسبت به تابع وزن  $w(x) = x^2$  بر  $(0, 1)$  بنویسیم، ضریب  $f_2(x)$  در این ترکیب خطی کدام است؟

الف. ۱  
ب.  $\frac{7}{3}$   
ج.  $\frac{1}{80}$   
د.  $\frac{7}{240}$

۲. اگر توابع  $f$  و  $g$  نسبت به تابع وزن  $w$  بر  $(a$  و  $b)$  متعامد باشند آنگاه توابع  $F = \sqrt{w} f$  و  $G = \sqrt{w} g$ :

الف. متعامد ساده اند  
ب. نیز نسبت به تابع وزن  $w$  متعامدند

ج. نسبت به تابع وزن  $\sqrt{w}$  متعامدند  
د. به ازای هیچ تابع وزنی متعامد نیستند

۳. دنباله توابع ساخته شده توسط تابع مولد  $F(x, t) = (1+t)^x$  کدام است؟

الف.  $\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$   
ب.  $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$

ج.  $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n}$   
د.  $p_n(x)$

۴. هرگاه  $p_n(x)$  چند جمله ای نژاندر باشد، آنگاه تعداد ریشه های معادله  $p_n(x) = 0$  درفاصله  $(-1, 1)$  برابر است با:

الف. ۳  
ب. ۵  
ج. ۰  
د. ۷

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۵. کدام یک از گزینه های زیر در مورد چند جمله ای های لژاندر صحیح نمی باشد؟

$$\|p_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \quad \text{ب.}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad \text{الف.}$$

$$(p_n(x), x^m) = \int_{-1}^1 x^m p_n(x) dx = 0 \quad \forall m \in N \quad \text{د.}$$

$$p_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad \text{ج.}$$

۶. جواب معادله دیفرانسیل  $\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + 2xy = 0$  کدام است؟

$$P_4(x) \quad \text{د.}$$

$$T_4(x) \quad \text{ج.}$$

$$T_3(x) \quad \text{ب.}$$

$$P_5(x) \quad \text{الف.}$$

۷. چند جمله ای های هرمیت  $H_n$  نسبت به تابع وزن ..... متعامدند.

$$e^{-x} \quad \text{بر } (0,1) \quad \text{د.}$$

$$e^{-x^2} \quad \text{بر } R \quad \text{ج.}$$

$$e^{-x} \quad \text{بر } (-1,1) \quad \text{ب.}$$

$$e^{-x^2} \quad \text{بر } R^+ \quad \text{الف.}$$

۸. هرگاه  $S_n(x)$  چند جمله ای های چیشف نوع دوم باشند،  $S_3(x)$  کدام است؟

$$4x^3 + 8x \quad \text{د.}$$

$$8x^3 + 4x \quad \text{ج.}$$

$$8x^3 - 4x \quad \text{ب.}$$

$$4x^3 - 8x \quad \text{الف.}$$

۹. توابع ویژه و مقادیر ویژه مسئله 
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$
 برابر است با:

$$\lambda_n = 4n^2, y_n(x) = \cos 2nx \quad \text{ب.}$$

$$\lambda_n = n^2, y_n(x) = \cos nx \quad \text{الف.}$$

$$\lambda_n = 2n, y_n(x) = \sin 2nx \quad \text{د.}$$

$$\lambda_n = n^2, y_n(x) = \sin nx \quad \text{ج.}$$

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ☹ ندارد ○

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۰. کدام یک از گزینه های زیر درمورد تابع گرین برای مسئله  $\begin{cases} Lu = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$  صحیح می باشد؟

ب. تابع گرین در  $x = \xi$  ناپیوسته است

$$\text{الف. } \frac{d}{dx}(p(x)w(x; u_1, u_p)) \neq 0$$

د. تابع گرین در شرایط مرزی مسئله صدق نمی کند.

ج. تابع گرین در  $x = \xi$  مشتق پذیر نیست.

۱۱. تعمیم تابع گرین برای مسئله  $\begin{cases} xy'' + y' = 0 & 0 < x < 1 \\ y(0) \\ y'(1) = 0 \end{cases}$  متناهی کدام است؟

$$\text{ب. } G^*(x, \xi) = \begin{cases} \sin x \cos \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ \sin \xi \cos x & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{الف. } G^*(x, \xi) = \begin{cases} x \ln \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi \ln x & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{د. } G^*(x, \xi) = \begin{cases} \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ x & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{ج. } G^*(x, \xi) = \begin{cases} \ln \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ \ln x & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

۱۲. هرگاه  $u_0$  جواب غیربدهی مسئله  $\begin{cases} Lu = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$  باشد دراین صورت مسئله ناهمگن  $\begin{cases} Lu = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

دارای جواب  $u$  است هرگاه :

ب.  $u, u_0$  وابسته خطی باشند.

الف.  $u, u_0$  مستقل خطی باشند.

$$\text{د. } \int_a^b u_0 f(x) dx \neq 0$$

$$\text{ج. } \int_a^b u_0 f(x) dx = 0$$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۱۳. ضرائب سری فوریه بر حسب چند جمله ای های لاگر کدام است؟

$$c_n = \int_0^{\infty} e^x f(x) L_n(x) dx \quad \text{ب.}$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) L_n(x) dx \quad \text{الف.}$$

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx \quad \text{د.}$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f(x) L_n(x) dx \quad \text{ج.}$$

۱۴. سری فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  با  $f(x+2) = f(x)$  در نقطه  $x=1$  به چه نقطه ای همگرا است؟

د. واگراست

ج. ۰

ب.  $\frac{1}{2}$ 

الف. ۱

۱۵. انتگرال فوریه کسینوسی تابع  $f(x) = e^{-2x}$  ،  $x > 0$  کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \cos sx}{4 + s^2} ds \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos sx}{4 + s^2} ds \quad \text{الف.}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \cos sx}{4 + s^2} ds \quad \text{د.}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \cos sx}{1 + s^2} ds \quad \text{ج.}$$

۱۶. هرگاه تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$  را بصورت یک انتگرال فوریه سینوسی بنویسیم حاصل  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi x}{x} \sin \pi x dx$

برابر است با :

د.  $\frac{\pi}{2}$ ج.  $\infty$ ب.  $\pi$ الف.  $\frac{\pi}{4}$

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۷. نوع معادله دیفرانسیل  $z = 0$   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z = 0$  کدام است؟

الف. خطی      ب. تقریباً خطی      ج. شبه خطی      د. هیچکدام

۱۸. معادله دیفرانسیل با کمترین مرتبه که  $z = f(y) \cos x + g(y) \sin x$  در آن صدق کند کدام است؟

الف.  $z_{xx} - z = 0$       ب.  $z_{xy} - z = 0$       ج.  $z_{xy} + z = 0$       د.  $z_{xx} + z = 0$

۱۹. جواب معادله دیفرانسیل  $xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + yz = 0$  کدام است؟

الف.  $z = f(xy)e^x$       ب.  $z = \frac{1}{x} f(x^2 + y^2)$

ج.  $z = \frac{f(x^2 + y^2)}{xy}$       د.  $z = \frac{1}{x} f(xy)$

۲۰. جواب عمومی معادله  $u_{xx} + u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0$  کدام است؟

الف.  $u = f(x+z) + g(x-y)$       ب.  $u = f(x+y+z)$

ج.  $u = x f(y+z)$       د.  $u = f(x-z) + g(x+y)$

## سؤالات تشریحی

۱. قضیه: نشان دهید همه مقادیر ویژه یک مسئله خود الحاق حقیقی است. (۲ نمره)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: ۷۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۲. فرض کنید  $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ ، سری فوریه  $f$  را نوشته و با انتگرال گیری جمله به جمله از  $0$  تا  $x$  وقتی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad \text{و با استفاده از آن نشان دهید} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3} = \frac{1}{12} x(\pi^2 - x^2) \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

(۲ نمره)

۳. سطح انتگرالی از معادله  $yp - xq = 2xyz$  را که از خط  $x = y = z = t$  می گذرد به دست آورید. (۲ نمره)

۴. ابتدا معادله  $xy(t-r) + (x^2 - y^2)s = py - qx - 2(x^2 - y^2)$  را دسته بندی کنید. سپس تغییر متغیری که این معادله

را به صورت نرمال تحویل می کند به دست آورید. (به دست آوردن صورت نرمال و حل معادله لازم نیست). (۲ نمره)

۵. جواب مسئله گرمای زیر را به روش جداسازی به دست آورید. (۲ نمره)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$