

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۶
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آنالیز ۳
 رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - (۱۱۱۱۰۴۶)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

امام علی^(ع): برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

الف. تابع دو سوئی $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ را یک طولپایی (isometri) می‌نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از X داشته باشیم $\sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$.

ب. هر گاه f همسانریخت باشد f^{-1} نیز چنین است.

ج. تابع دو سوئی $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ را یک طولپایی می‌نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از X داشته باشیم $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

د. اگر f یک همسانریختی بین دو فضای متریک باشد آن گاه f مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌برد.

۲. کدام گزینه در مورد تابع $f = (f_1, \dots, f_n): X \rightarrow R^n$ ($X \subseteq R^m$) همواره صحیح است ($c \in X$)

الف. f در c مشتق پذیر است اگر و فقط اگر هر f_j ($1 \leq j \leq n$) در c مشتق پذیر باشد.

ب. f در c مشتق پذیر است هرگاه هر $D_i f_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) در c موجود باشد.

ج. هرگاه f در c پیوسته باشد آنگاه f در c مشتق پذیر است.

د. هرگاه f دو سوئی و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه f^{-1} نیز در $f(c)$ مشتق پذیر است.

۳. کدامیک از موارد زیر بر قضیه نقطه ثابت با ناخ دلالت می‌کند؟

الف. اگر Ω یک تابع انقباض بر فضای متریک (X, ρ) باشد آنگاه معادله $\Omega(x) = x$ یک و تنها یک جواب دارد.

ب. اگر Ω یک تابع انقباض بر فضای متریک کامل (X, ρ) باشد آنگاه معادله $\Omega(x) = x$ یک و تنها یک جواب دارد.

ج. اگر Ω یک تابع انقباض بر فضای متریک (X, ρ) باشد آنگاه معادله $\Omega(x) = x$ بی نهایت جواب دارد.

د. اگر Ω یک تابع انقباض بر فضای متریک کامل (X, ρ) باشد آنگاه معادله $\Omega(x) = x$ بی نهایت جواب دارد.

۴. اگر $f: R^p \rightarrow R^p$ یک تابع با ضابطه $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ باشد آنگاه

الف. $J f(x, y) = e^{px}$ ب. $J f(x, y) = e^{-px}$ ج. $J f(x, y) = -e^{px}$ د. $J f(x, y) = 0$

۵. فرض کنید E یک زیر مجموعه $f: E \rightarrow R^n, R^n$ بر مجموعه باز $G \subset E$ مشتق پذیر پیوسته بوده و برای هر $x \in G$ ، $Jf(x) \neq 0$ آن گاه

الف. $f(G)$ باز است ب. $f(G)$ بسته است ج. $f(G)$ کامل است د. $f(G)$ هم بند است

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۶
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آنالیز ۳
 رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - (۱۱۱۱۰۴۶)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۶. فرض کنید f_1, f_2 توابعی بر R^p با ضابطه $f_1(x, y) = x \cos y$, $f_2(x, y) = x \sin y$ باشد آنگاه:

الف. f_1, f_2 در هر زیر مجموعه باز از R^p وابسته تابعی هستند.

ب. f_1, f_2 در R^p وابسته تابعی هستند.

ج. f_1, f_2 در هر زیر مجموعه بسته از R^p وابسته تابعی نیستند.

د. f_1, f_2 در هر زیر مجموعه باز از R^p وابسته تابعی نیستند.

۷. هرگاه P یک تصویر در X باشد $x_1 = P(x)$, $x_p = x - x_1$ آنگاه $P(x_p)$ برابر است با:

د. ۲

ج. ۱-

ب. ۱

الف. ۰

۸. فرض کنید f تابعی از R^m به R^n و در t دو بار مشتق پذیر باشد آنگاه کدام عبارت نادرست است؟

الف. $D^p f(t) \in L(R^m, L(R^m, R^n))$

ب. $D^p f(t)(u) \in L(R^m, R^n)$ که $u \in R^m$

ج. $D^p f(t) \in L(R^n, L(R^m, R^n))$

د. $D^p f(t)(u)(v) \in R^n$ که $u, v \in R^m$

۹. هر خم در R^n که نماینده ای به صورت $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ بر $[a, b]$ داشته باشد طولپذیر است اگر:

الف. هر مؤلفه φ_i از $1 \leq i \leq n$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

ب. هر مؤلفه φ_i از $1 \leq i \leq n$ بر $[a, b]$ باتغییر کراندار باشد.

ج. هر مؤلفه φ_i از $1 \leq i \leq n$ بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد.

د. هر مؤلفه φ_i از $1 \leq i \leq n$ بر $[a, b]$ کراندار باشد.

۱۰. طول خم $f(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ($a > 0$) در بازه $[0, 2\pi]$ برابر است با:

د. $2\pi a$

ج. $\frac{\pi a}{2}$

ب. $4\pi a$

الف. πa

۱۱. فرض کنید Γ مسیری در R^p با ضابطه $(0 \leq t \leq 2\pi)$ $x = \cos t$, $y = \sin t$ باشد در این صورت انتگرال

$$\int_{\Gamma} (x^p y dx - x^p dy)$$

د. -2π

ج. 2π

ب. $-\pi$

الف. π

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۶
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آنالیز ۳
 رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - (۱۱۱۱۰۴۶)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۱۲. فرض کنید E مثلث به رئوس $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $f: E \rightarrow R$ با ضابطه $f(x, y) = 4(x^2 + 2y + 1)^{-2}$ باشد آنگاه $\int_E f(x, y) dx dy$ برابر است با:

الف. $1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ب. $1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ج. $1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ د. $1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

۱۳. به ازای هر دو بازه بسته I و J , $C(I \cap J) = \emptyset$ (قدر مجموعه $I \cap J$) اگر و تنها اگر:

الف. هر نقطه مشترک I و J یک نقطه مرزی از هر دو باشد.

ب. هر نقطه مشترک I و J یک نقطه درونی از هر دو باشد.

ج. هر نقطه مشترک I و J یک نقطه خارجی از هر دو باشد.

د. بازه‌های I و J نقطه مشترکی نداشته باشند.

۱۴. اگر P یک متوازی السطوح در R^n , λ یک تابع خطی بر R^n به R^n باشد به طوری که $J\lambda = \emptyset$ (ژاکوبی λ), آنگاه:

الف. $C(\lambda(P)) = 1$ ب. $C(\lambda(P)) = n$ ج. $C(\lambda(P)) = 2$ د. $C(\lambda(P)) = \emptyset$

۱۵. اگر $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ آنگاه $\int_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy$ برابر است با:

الف. $(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{3})\pi$ ب. $(\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3})\pi$ ج. $(\frac{2 - \sqrt{2}}{3})\pi$ د. $(\frac{2 + \sqrt{2}}{3})\pi$

۱۶. کدام گزینه صحیح است؟ ($A \subseteq R^n$)

الف. اگر A دارای اندازه صفر باشد آنگاه A دارای قدر صفر است.

ب. اگر A کراندار و دارای اندازه صفر باشد آنگاه A دارای قدر صفر است.

ج. اگر A فشرده و دارای اندازه صفر باشد آنگاه A دارای قدر صفر است.

د. اگر A بسته و دارای اندازه صفر باشد آنگاه A دارای قدر صفر است.

۱۷. اگر w یک k -فرم و v یک l -فرم باشد آنگاه کدامیک از گزینه های زیر برقرار است؟

الف. $d(w \wedge v) = dw \wedge v + w \wedge dv$ ب. $d(w \wedge v) = dw \wedge v - w \wedge dv$

ج. $d(w \wedge v) = dw \wedge v + (-1)^k w \wedge dv$ د. $d(w \wedge v) = dw \wedge v + (-1)^{k-1} w \wedge dv$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۶
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آنالیز ۳
 رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - (۱۱۱۱۰۴۶)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۱۸. یک ۱- فرم W را زمانی کامل می‌گوییم که:

الف. تابعی مانند f موجود باشد به طوری که $w = df$

ب. تابعی مانند f موجود باشد به طوری که $df = dw$

ج. تابعی مانند f موجود باشد به طوری که $f = dw$

د. $dw = 0$

۱۹. اگر $T \in \tau^k(V)$ آنگاه کدامیک از روابط زیر برقرار نیست؟

الف. $Alt(Alt(T)) = 0$

ب. $Alt(T) \in A^k(V)$

ج. $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$

د. هرگاه $S \in A^k(V)$ آنگاه $S \otimes Alt(T) \in A^{k+k}(V)$

۲۰. اگر $C : [0, 1] \rightarrow R^p - \{0\}$ با ضابطه $C(t) = (\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt)$ باشد که n عدد صحیح غیر صفر است آنگاه

کدامیک از روابط زیر درست است؟

الف. $\partial C = 1$

ب. $\partial C = 0$

ج. $\partial C = 2$

د. $\partial C' = C$ موجود است به طوری که $\partial C' = C$

سؤالات تشریحی

*بارم هر سؤال ۲ نمره است.

*از ۶ سؤال زیر فقط به پنج سؤال پاسخ دهید.

۱. فرض کنید $f : R^3 \rightarrow R$ با ضابطه $f(x, y, z) = x^p e^{-yz}$ تعریف شده باشد، مشتق f را در نقطه $a = (1, 0, 0)$

و در امتداد $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ به دست آورید.

۲. اثر هر منحنی طولپذیر (در R^n) دارای قدر صفر است.

۳. اگر تابع $f : I \times J \rightarrow R$ پیوسته باشد، آنگاه ثابت کنید به ازای هر $y \in J$ ، $f(0, y)$ بر I انتگرال پذیر بوده و تابع

$\varphi : J \rightarrow R$ با ضابطه $\varphi(y) = \int_I f(x, y) dx$ بر J پیوسته است.

۴. تابع $X_C : A \rightarrow R$ (انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر مرز C دارای اندازه صفر باشد).

نام درس: آنالیز ۳	تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۶
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - (۱۱۱۱۰۴۶)	زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
کد سری سؤال: یک (۱)	آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗
استفاده از: —	مجاز است.

۵. اگر $M \rightarrow [0,1]^k : c_1, c_p$ دو k -مکعب منفرد در خمینه k -بعدی M باشند که جهت را حفظ می کنند و اگر w یک k -فرم

$$\text{بر } M \text{ باشد به طوری که در خارج } (c_1([0,1]^k) \cap c_p([0,1]^k)) \text{، } w = 0 \text{، آنگاه ثابت کنید } \int_{c_1} w = \int_{c_p} w$$

۶. تابع $\Omega : C([0,1]) \rightarrow C([0,1])$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\Omega(\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t) dt \quad (\varphi \in C([0,1]), x \in [0,1])$$

در این صورت ثابت کنید Ω یک انقباض نیست اما $\Omega^2 = \Omega \circ \Omega$ یک انقباض است.