نام درس: آمار ریاضی (۱)	**تعداد سؤالات: تستی:** ۲۰ **تشریحی:** ۵
رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی(محض و کاربردی) ۱۱۱۷۰۲۲	**زمان آزمون: تستی:** ۶۰ **تشریحی:** ۷۰ **دقیقه**
--	**آزمون نمره منفی دارد○ ندارد◉**
کُد سری سؤال: یک (۱)	**استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

امام علی(ع): برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. اگر متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، چگالی قدر مطلق آن، عبارت است از:

الف. $\frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-t}{۲}}$ ب. $\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{t}{۲}}$ ج. $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{t^۲}{۲}}$ د. $\frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{t^۲}{۲}}$

۲. فرض کنید : $F_X(x)=۱-e^{-۲x}$, $۰<x<\infty$, $Y=e^X$ ، در این صورت تابع چگالی $Y=e^X$ کدام است؟

الف. $۲y^{-۳}\ ,\ ۰<y<\infty$ ب. $y^{-۲}\ ,\ ۰<y<\infty$

ج. $۱-y^{-۲}\ ,\ ۰<y<\infty$ د. $۲y^{-۲}\ ,\ ۰<y<\infty$

۳. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی X به ازاء : $x=۱,۲,...$، دارای تابع احتمال $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ باشد، در این صورت تابع احتمال متغیر تصادفی $Y=(-۱)^X$ عبارت است از:

الف. $(\frac{۱}{۴})^K, K\in N$ ب. $\frac{۲}{۳}, y=-۱$ ج. $(\frac{۱}{۲})^{۲K-۱}, K\in N$ د. $\begin{cases}\frac{۱}{۳} & , \quad y=۱\\ \frac{۲}{۳} & , \quad y=-۱\end{cases}$

۴. فرض کنید جامعه‌ای با توزیع احتمال $X\sim u(۰,۱)$ داریم. توزیع احتمال آمارهٔ Y_n (n اُمین آمارهٔ ترتیبی) کدام است؟

الف. توزیع بتا با پارامترهای $\alpha=n\ ,\ \beta=۱$ ب. توزیع گاما با پارامترهای $\alpha=n\ ,\ \beta=۱$

ج. توزیع بتا با پارامترهای $\alpha=۱\ ,\ \beta=۱$ د. توزیع گاما با پارامترهای $\alpha=۱\ ,\ \beta=n$

۵. با فرض این که تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت:

$$F_X(t)=\begin{cases}۰\ , t<۰\\ t\ , ۰\le t\le ۱\\ ۱\ , t>۱\end{cases}$$

باشد، تابع توزیع متغیر تصادفی $Y=-\ln X$ کدام است؟

الف. $F_Y(t)=\begin{cases}۰\ ,t<۰\\ ۱-e^{-t},t\ge ۰\end{cases}$ ب. $F_Y(t)=\begin{cases}۰\ ,t<۰\\ ۱-e^{\frac{-t}{۲}},t\ge ۰\end{cases}$

ج. $F_Y(t)=\begin{cases}۰\ ,t<۰\\ ۱-e^{\frac{-۲t}{۳}},t\ge ۰\end{cases}$ د. $F_Y(t)=\begin{cases}۰\ ,t<۰\\ ۱-e^{-۲t},t\ge ۰\end{cases}$

نام درس: آمار ریاضی (۱)	**تعداد سؤالات: تستی:** ۲۰ **تشریحی:** ۵
رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی(محض و کاربردی) ۱۱۱۷۰۲۲	**زمان آزمون: تستی:** ۶۰ **تشریحی:** ۷۰ **دقیقه**
--	**آزمون نمره منفی دارد○ ندارد●**
کُد سری سؤال: یک (۱)	**استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

۶. فرض کنید X_1 , X_2 دو متغیر تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی با پارامتر ۱ باشند . در اینصورت توزیع توأم متغیرهای تصادفی $y_1 = X_1$, $y_2 = X_1 + X_2$ کدام است؟

الف. $e^{-y_1 - y_2}, (y_1 , y_2) \in \beta$
ب. $e^{-y_2}, (y_1 , y_2) \in \beta$
ج. $e^{-y_1}, (y_1 , y_2) \in \beta$
د. $e^{+y_2}, (y_1 , y_2) \in \beta$

(β : فضای مربوط به (y_1 , y_2) است)

۷. اگر توزیع متغیر تصادفی X به صورت $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}}$, $x > 0$ بوده و X_1 , X_2 نمونه‌ای تصادفی از این توزیع باشد، آن‌گاه توزیع $Y = \frac{X_1}{X_2}$ عبارت است از:

الف. $U(0 , 1)$
ب. $\chi^2_{(1)}$
ج. $\Gamma(2,2)$
د. $F(2,2)$

۸. با فرض این که X_1 , X_2 دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد باشند آنگاه، توزیع متغیر تصادفی : $Y = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}$ عبارت است از:

الف. $\chi^2_{(1)}$
ب. $t_{(2)}$
ج. $F(1,1)$
د. $\chi^2_{(2)}$

۹. اگر X_1 , $X_2 ,..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، متغیر تصادفی $y = \frac{\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i X_i}{\sqrt{2k}(X_1 - \mu)}$ دارای چه توزیعی است؟

الف. $t_{(1)}$
ب. $t_{(K)}$
ج. نرمال
د. $\chi^2_{(K)}$

۱۰. جدول توزیع احتمال زیر را در نظر بگیرید:

X	۱	۲	۳
$P_\theta(X = x)$	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2}$

کدام‌یک از موارد زیر، بر اساس یک تک مشاهده، برآورد نا اریبی برای θ است؟

الف. ۱
ب. X
ج. $3 - X$
د. $\frac{1}{2}(5 - 2X)$

نام درس: آمار ریاضی (۱) — **تعداد سؤالات: تستی:** ۲۰ **تشریحی:** ۵

رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی(محض و کاربردی) ۱۱۱۷۰۲۲ — **زمان آزمون: تستی:** ۶۰ **تشریحی:** ۷۰ **دقیقه**

آزمون نمره منفی دارد○ ندارد◉

کُد سری سؤال: یک (۱) — **استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

۱۱. اگر $X_1 , X_2 ,..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از توزیعی با چگالی زیر باشد، برآورد گر به روش درستنمایی ماکزیمم $\frac{1}{\theta}$ عبارت است از:

$$f(x)=\theta(1-\theta)^x , \; x=0,1,2,3,...$$

الف. $\frac{1}{\bar{x}+1}$ ب. $\frac{1}{\bar{x}}$ ج. $\bar{x}+1$ د. $\bar{x}$

۱۲. برای خانواده توزیع احتمال زیر، با فرض مشاهدهٔ عدد $x=3$ ، برآوردگر به روش درستنمایی ماکزیمم θ کدام است؟

$f(x\mid\theta)$ \ X	۱	۲	۳
θ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
θ_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
θ_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

الف. $\frac{1}{3}$ ب. θ_2 ج. θ_3 د. $\frac{1}{2}$

۱۳. متغیر تصادفی X در فاصله $(0,1)$ دارای تابع توزیع $F(x,\theta)=x^\theta$ است. نمونه تصادفی $X_1 , X_2 ,..., X_n$ را از این توزیع در نظر می‌گیریم. با فرض $\theta>0$، برآورد گشتاوری θ عبارت است از:

الف. $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$ ب. $\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$ ج. $\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}}$ د. $\frac{1+2\bar{X}}{\bar{X}}$

۱۴. اگر $X_1 , X_2 ,..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با میانگین، ۱، باشد، آن‌گاه توزیع متغیر تصادفی $Y_1=\min(X_1 ,..., X_n)$ کدام است؟

الف. نرمال ب. نمایی با میانگین $\frac{1}{n}$ ج. نمایی با میانگین n د. گاما با پارامترهای $n,1$

۱۵. یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جامعه‌ای با توزیع نمایی $f(x)=\theta^{-\theta x} , \; x>0$ در نظر می‌گیریم. برآوردگر به روش درستنمایی ماکزیمم $\tau(\theta)=P(X>1)$ کدام است:

الف. $\bar{x}$ ب. $\frac{1}{\bar{x}}$ ج. $e^{-\bar{x}}$ د. $e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$

نام درس: آمار ریاضی (۲)
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی(محض و کاربردی) ۱۱۱۷۰۲۲
زمان آزمون: تستی: ۷۰ تشریحی: دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ○
کُد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: ماشین حساب مجاز است.

۱۶. اگر T یک برآوردگر $\tau(\theta)$ و نیز قرار دهیم:

$$b(T)=E(T)-\tau(\theta)$$

آن‌گاه MSE برای T عبارت است از:

الف. $\operatorname{var}(T)+b(T)$ ب. $\operatorname{var}(T)+(b(T))^2$ ج. $E(T)+(b(T))^2$ د. $\operatorname{var}(T)-(b(T))^2$

۱۷. دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی با پارامتر P را در نظر می‌گیریم. اگر X تعداد آزمایش‌های لازم تا رسیدن به K موفقیت باشد، برآورد کننده نااریب $\frac{1}{P}$ عبارت است از:

الف. $\frac{K}{X}$ ب. $\frac{K}{X-K}$ ج. $\frac{X}{K}$ د. $\frac{X-K}{K}$

۱۸. نمونه‌ای تصادفی به حجم n از جامعه‌ای با توزیع $u(0,\theta)$ که در آن θ مجهول است، در نظر می‌گیریم آمارهٔ بسنده برای θ کدام است؟

الف. Y_i ب. Y_n ج. $\bar{X}$ د. $\frac{1}{\bar{X}}$

۱۹. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f_\theta(x)=\frac{x}{\theta}e^{\frac{-x^2}{2\theta}}$ ، $x>0\ ,\ \theta>0$ باشد. آماره بسنده مینیمال برای θ عبارت است از:

الف. $\frac{\sum X_i^2}{2n}$ ب. X^2 ج. $\prod_{i=1}^{n} X_i^2$ د. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

۲۰. فرض می‌کنیم $X_1,X_2,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f_\theta(x)=(1-\theta)^x\theta\ ,\ x=0,1,\dots$ باشد . در این صورت $UMVUE$ برای $\tau(\theta)=\frac{1}{\theta}$ عبارت است از:

الف. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ب. $\bar{X}+1$ ج. $\bar{X}$ د. $\frac{1}{\bar{X}+1}$

کارشناسی (سنتی) دانشگاه پیام نور مرکز آزمون **استان:**

نیمسال اول ۸۹-۸۸

نام درس: آمار ریاضی (۲)		**تعداد سؤالات: تستی:** **تشریحی:** یک (۱)
رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی(محض و کاربردی) ۱۱۱۷۰۲۲		**زمان آزمون: تستی:** **تشریحی:** ۷۰ **دقیقه**
کُد سری سؤال: یک (۱)	**استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**	**آزمون نمره منفی دارد○ ندارد○** *

سؤالات تشریحی

۱. الف. فرض می‌کنیم X_1 , X_2 متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 1$ باشند. اگر داشته باشیم :

$Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ ، تحقیق کنید: آیا Y_1 , Y_2 می‌توانند مستقل باشند؟ (۱/۵ نمره)

ب. اگر X روی فاصله $[-1,3]$ توزیع یکنواخت داشته باشد، تابع چگالی احتمال $Y = X^2$ را به دست آورید.

۲. قضیه حد مرکزی را به طور دقیق بیان و آن را ثابت کنید.(۱ نمره)

۳. اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ و $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ دو نمونه تصادفی از ۲ توزیع نرمال مستقل باشند به طوری که اولی دارای میانگین $\mu_1 = \alpha + \beta$, $\sigma_1^2 = 1$ و دومی دارای میانگین $\mu_2 = \alpha - \beta$, $\sigma_2^2 = 2$ باشند، برآورد کننده‌های به روش درستنمایی ماکزیمم همزمان α , β را به دست آورید.(۱/۵نمره)

۴. فرض می‌کنیم $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته روی (a,b) باشد. اگر a معلوم فرض شود، با استفاده از تعریف آماره بسنده ثابت کنید Y_n(n امین آماده ترتیبی) آماره بسنده برای b است و با استفاده از آن، و در صورت وجود (و با بیان همه دلایل لازم) ، UMVUE برای b را بیابید.(۱/۵نمره)

۵. فرض کنید: $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع: $f_x(\theta) = \frac{\theta}{e^{\theta x}} I_{(0, \infty)}(x)$ باشد. کران پائین کرامر– رائو، را برای برآوردگرهای ناااریب $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta} = \theta^{-1}$ بیابید. و در صورت وجود ، یک UMVUE برای آن $(\frac{1}{\theta})$ بدست آورید.

(۱/۵نمره)