

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

امام علی<sup>(ع)</sup>: شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

۱. کدامیک از گزینه های زیر مربوط به خواص حاصلضرب داخلی توابع  $h, g, f$  نمی باشد؟ ( $c \in \mathbb{R}$ )

الف.  $(f, g) = (g, f)$       ب.  $(f, g - h) = (f, g) - (f, h)$

ج.  $(cf, g) = c(f, g)$       د.  $(f, g) = (f, h) \Rightarrow g = h'$

۲. اگر  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد بطوریکه نرم  $f$  صفر باشد آنگاه :

الف.  $f$  غیر ثابت است      ب.  $f$  قطعه قطعه پیوسته است

ج.  $f$  انتگرال نا پذیر است      د.  $f$  صفر است

۳. نرم هر یک از توابع  $U_n(x) = \sin(nx)$  هرگاه  $0 \leq x \leq \pi$  بطوریکه برابر کدام گزینه است؟

الف.  $\frac{\pi}{2}$       ب.  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$       ج.  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$       د.  $\sqrt{\pi}$

۴. تابع دو متغیره  $F$  برای مجموعه توابع  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  را یک تابع مولد می نامیم هرگاه :

الف.  $F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^n)t$       ب.  $F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t$

ج.  $F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).t^n$       د.  $F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^n).t^n$

۵. فرم خود الحاقی مربوطه به معادله دیفرانسیل  $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$  که در آن  $-1 < x < 1$  کدام است ؟

الف.  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x) \frac{du}{dx} \right] + n(n+1)u = 0$       ب.  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + n(n+1)u = 0$

ج.  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x) \frac{du}{dx} + n(n+1)x \right] = 0$       د.  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} + n(n+1)x \right] = 0$

۶. جواب غیر بدیهی مربوط به معادله دیفرانسیل  $u'' + u = 0$  با مقادیر اولیه  $u(0) = u(\pi) = 0$

کدام است؟ (  $c$  یک عدد ثابت می باشد )

الف.  $ce^{\sin x}$       ب.  $ce^{\cos x}$       ج.  $c \sin x$       د.  $c \cos x$

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۷. کدام گزینه در مورد مقادیر ویژه مربوط به یک مسئله خودالحاق برقرار است؟

- الف. همه مقادیر ویژه منفرد اند  
ب. همه مقادیر ویژه نامنفرد اند  
ج. همه مقادیر ویژه حقیقی اند  
د. همه مقادیر ویژه غیر حقیقی اند

۸. در مورد چندجمله ای های لژاندر  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  و نرم آنها یعنی  $\|p_n\|$  کدام گزینه برقرار است؟  $n \geq 0$

الف.  $\|p_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$  ب.  $\|p_n\| = \frac{2}{2n+1}$

ج.  $\|p_n\|^2 = \frac{2}{2n-1}$  د.  $\|p_n\| = \frac{2}{2n-1}$

۹. اگر  $a_n$  و  $b_n$  ضرایب سری فوریه تابع قطعه ای هموار  $f$  بر بازه  $[-\pi, \pi]$  باشند آنگاه کدام گزینه با رابطه

$$\frac{a_0^p}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^p + b_n^p)$$

معادل می باشد؟

الف.  $\frac{1}{\pi} \|f\|$  ب.  $\frac{1}{\pi} \|f\|^p$  ج.  $\frac{1}{p\pi} \|f\|$  د.  $\frac{1}{p\pi} \|f\|^p$

۱۰. اگر تابع  $g$  بر بازه  $a \leq t \leq b$  قطعه ای پیوسته باشد، آنگاه مقدار حد  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt$  کدام است؟

- الف.  $\infty$  ب. ۱ ج. -۱ د. صفر

۱۱. در نمایش سری فوریه مثلثاتی تابع  $f(t) = \sin^p t \cos pt$  به فرم  $\frac{a_0}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$  کدام گزینه برقرار

است؟

الف.  $a_4 = \frac{-1}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{-1}{2}$  ب.  $a_4 = \frac{-1}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{-1}{4}$

ج.  $a_4 = 4, a_2 = 2, a_0 = 4$  د.  $a_4 = 4, a_2 = 2, a_0 = 8$

۱۲. تساوی پارسول برای تابع  $f$  کدام است؟

الف.  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$  ب.  $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$

ج.  $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$  د.  $\|f\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} C_k \right)^2$

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۳. معادله دیفرانسیل مربوط به خانواده تمام سطوح دوار حول محور  $z$  ها عبارتست از:

الف.  $xp + yq = 0$     ب.  $xq + yp = 0$     ج.  $yp - xq = 0$     د.  $xp - yq = 0$

۱۴. یک جواب مسئله کوشی  $z = U(x, y)$  از معادله  $yp - xq = 0$  بطوریکه  $U(x, 0) = x^4$  کدام است؟

الف.  $z = x^2 + y^2$     ب.  $z = (x^2 + y^2)^2$     ج.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$     د.  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

۱۵. مبین معادله  $(1 - x^2)z_{xx} - 2xy z_{xy} + (1 - y^2)z_{yy} + xz_x + 3x^2yz_y - 2z = 0$

کدام است؟

الف.  $x^2 + y^2 - 1$     ب.  $x^2 - y^2 + 1$     ج.  $x^2 - y^2 - 1$     د.  $x^2 + y^2 + 1$

۱۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $yz_{xx} + (x + y)z_{xy} + xz_{yy} = 0$  بر روی خط  $y = x$  کدام است؟

الف. هذلولوی    ب. سهموی    ج. دایره    د. بیضی

۱۷. مسئله پیدا کردن تابعی که روی ناحیه دلخواه  $A$  همساز باشد و روی مرز  $A$  مقادیر معینی بگیرد معروف است به مسئله:

الف. لژاندر    ب. بسل    ج. دیریکله    د. باناخ

۱۸. کدام معادله زیر، معادله سه بعدی لاپلاس می باشد؟

الف.  $u_x + u_y + u_z = 0$     ب.  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

ج.  $u_{xyz} - xyz = 0$     د.  $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} = 0$

۱۹. تابع  $z = ay + bx + ab$  در کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی صدق می کند؟

الف.  $z = qy + px + pq$     ب.  $z = py + qx$

ج.  $z = pq$     د.  $z = pq - xy$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۷)

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۲۰. کدام گزینه در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم زیر درست است ؟
- الف. معادله لاپلاس  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  از نوع هذلولیگون است .
- ب. معادله گرما  $u_t = c^2 u_{xx}$  از نوع بیضیگون است
- ج. معادله موج  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  از نوع هذلولیگون است
- د. معادله لاپلاس و معادله گرما هر دو از نوع هذلولیگون می باشند .

## سؤالات تشریحی

\* بارم هر سؤال ۲ نمره می باشد.

۱. هرگاه  $P_n(x)$  چند جمله ای لژاندر مرتبه  $n$  باشد نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{اگر } n = m \end{cases}$$

۲. تابع  $f(x)$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$  و تئیکه  $f(x+2\pi) = f(x)$  را در نظر گرفته سپس نشان دهید سری مثلثاتی کلی

فوریه آن بصورت  $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$  می باشد .

۳. فرمول انتگرال فوریه مربوط به تابع  $f$  بصورت  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$  را بدست آورید.

۴. جواب عمومی معادله  $xzp + yzq = -(x^2 + y^2)$  را پیدا کنید.

۵. معادله دیفرانسیل مربوط به خانواده تمام صفحات مماس بر بیضیگون به معادله  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$  را که بر صفحه  $xy$  عمود نیستند را تعیین کنید.