

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

امام علی^(ع): برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. دستگاه $\begin{cases} u_1' = u_p \\ u_p' = -u_1 + tu_p \end{cases}$ مفروض است کدام معادله دیفرانسیل نشان‌دهنده است این دستگاه است؟

ب. $u'' + u = t + u$

الف. $u'' + u' = tu$

د. $u'' + u' = \frac{1}{t} t^p u$

ج. $u' + u = \frac{1}{t} tu^p$

۲. کدام گزینه از ویژگی‌های یک دستگاه خودگردان $x' = f(x)$ است؟ $(x' = \frac{dx}{dt})$

الف. در جواب این دستگاه متغیر t ظاهر نمی‌گردد.

ب. اگر $\varphi(t)$ یک جواب این دستگاه روی فاصله (r_1, r_p) باشد آنگاه $\varphi(t - t_0)$ نیز یک جواب دستگاه روی (r_1, r_p) است.

ج. اگر $\varphi(t)$ جواب دستگاه روی (r_1, r_p) باشد آنگاه $\varphi(t - t_0)$ نیز جواب آن روی $(r_1 + t_0, r_p + t_0)$ است.

د. اگر $\varphi(t)$ جواب این دستگاه روی (r_1, r_p) باشد آنرا می‌توان به جواب روی $(-\infty, +\infty)$ توسیع داد.

۳. کدام گزینه درست‌تر است؟

الف. هر معادله دیفرانسیل غیر خطی فقط دارای جوابهای منفرد است.

ب. هر معادله دیفرانسیل خطی می‌تواند هم دارای جواب منفرد و هم جواب عمومی باشد.

ج. هر معادله دیفرانسیل غیر خطی می‌تواند فقط دارای جواب عمومی باشد.

د. هر معادله دیفرانسیل غیر خطی می‌تواند هم دارای جواب عمومی باشد و هم دارای جواب منفرد باشد.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۴. معادله $u' = g(t, u)(*)$ با شرط اولیه $u(t_0) = u_0$ مفروض است اگر تابع $g(t, u)$ روی نوار

$(S : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |u| < \infty)$ پیوسته و کراندار باشد کدام گزینه درست است؟

الف. معادله $(*)$ دقیقاً دارای یک جواب $u(t)$ روی $[t_0, t_0 + a]$ است.

ب. معادله $(*)$ حداقل دارای یک جواب $u(t)$ روی $[t_0, t_0 + a]$ است.

ج. معادله $(*)$ دقیقاً دارای یک جواب $u(t)$ روی $(-\infty, +\infty)$ است.

د. شرط لپشیتز یک شرط لازم برای وجود یک جواب $u(t)$ برای معادله $(*)$ است.

۵. معادله با شرط اولیه $u' = 4u^{\frac{3}{4}}, u(0) = 0$ مفروض است کدام گزینه نادرست است؟

الف. همه جمله‌های دنباله تقریبهای متوالی این معادله، توابع صفرند.

ب. $u(t) = t^2$ یک جواب مسأله است.

ج. این مسأله دارای جواب یکتا نیست.

د. این مسأله دارای جواب یکتا است.

۶. مسأله با مقدار اولیه $u' = u^2 - t, u(0) = 1$ که در آن $t \geq 0$ و $|u| \geq 1$ مفروض است اگر $u(t)$ یک جواب آن باشد در این

صورت $u(t)$ در فاصله $0 < t < 1$ در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

ب. $1 - t < u(t) < \frac{1}{1+t}$

الف. $1 + t < u(t) < \frac{1}{1-t}$

د. $t < u(t) < \frac{1}{t}$

ج. $\frac{1}{t-1} < u(t) < t+1$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۷. اگر u و v توابع نامنفی روی بازه $[t_0, t_0 + a]$ باشند و برای هر t ، $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ داشته باشیم

$u(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$ ، کدام گزینه درست است؟

الف. $u(t) \leq v(t) \exp[\int_{t_0}^t v(s)ds]$ ب. $u(t) \leq \exp[\int_{t_0}^t v(s)ds]$

ج. $v(t) \leq u(t) \exp[\int_{t_0}^t v(s)ds]$ د. $v(t) \leq \exp[\int_{t_0}^t v(s)ds]$

۸. دستگاه خطی همگن مرتبه اول $\chi' = A(t)\chi$ (صورت ماتریسی) را در نظر بگیرید و فرض کنید $t_0 \in (r_1, r_p)$ و $\varphi(t)$ جوابی

از آن باشد که در شرط $\varphi(t) = 0$ صدق کند، در این صورت کدام گزینه درست است؟

الف. $\varphi(t)$ روی (r_1, r_p) متحد با صفر است. ب. $\varphi(t)$ جواب کراندار است.

ج. $\varphi(t)$ فقط در نقطه t_0 صفر می‌شود. د. $\lim_{t \rightarrow r_1^+} \varphi(t) = 1$

۹. مجموعه $\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t), \varphi_n(t)$ را یکدستگاه اصلی از دستگاه معادلات دیفرانسیل (*) $\chi' = A(t)\chi$

گوئیم هر گاه:

الف. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ جواب دستگاه (*) باشند.

ب. هر ترکیب خطی $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ جواب دستگاه (*) باشند.

ج. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ جوابهای خطی - مستقل دستگاه (*) باشد.

د. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ جوابهای وابسته خطی دستگاه (*) باشد.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

مجاز است.

استفاده از: —

کد سری سؤال: یک (۱)

۱۰. شرط $w(t) \neq 0$ (رونسکین) برای آنکه جواب $\varphi(t)$ معادله دیفرانسیل ماتریسی $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$ جواب اساسی دستگاه

خطی $\chi'(t) = A(t)\chi(t)$ باشد این چگونه شرطی است؟

الف. یک شرط لازم است ولی کافی نمی باشد. ب. یک شرط کافی است ولی لازم نیست.

ج. هم شرط لازم و هم شرط کافی است. د. نه شرط لازم و نه شرط کافی است.

۱۱. اگر ϕ یک ماتریس اصلی $\chi' = A(t)\chi$ و C یک ماتریس ثابت باشد در چه صورت ϕC نیز یک ماتریس اصلی

$\chi' = A(t)\chi$ است؟

الف. C یک ماتریس منفرد باشد. ب. C یک ماتریس نامنفرد باشد.

ج. C یک ماتریس مثلثی باشد. د. C یک ماتریس قطری باشد.

۱۲. اگر $x \in R^n$, A ماتریس $n \times n$ ثابت و $\varphi(t)$ یک ماتریس اصلی $x' = Ax$ باشد بطوریکه $\varphi(0) = I$ کدام گزینه درست

است؟

الف. $\forall \alpha \in R, \varphi(t)\varphi(\alpha) = \varphi(t + \alpha)$ ب. $\forall \alpha \in R, \varphi(t)\varphi^{-1}(\alpha) = \varphi(t - \alpha)$

ج. $\forall \alpha \in R, \varphi(t)\varphi(\alpha) = \varphi(t + \alpha)$ د. $\forall \alpha \in R, \varphi(t)\varphi^{-1}(\alpha) = \varphi(t + \alpha)$

۱۳. اگر $L(\lambda)$ چند جمله ای مشخصه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت

$L(D)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ باشد در چه صورت تمام جوابهای $L(D)y = 0$ کراندارند؟

الف. قسمت حقیقی تمام ریشه های $L(\lambda) = 0$ منفی باشد. ب. تمام ریشه های $L(\lambda) = 0$ حقیقی باشند.

ج. قسمت حقیقی تمام ریشه های $L(\lambda) = 0$ مثبت باشد. د. تمام ریشه های $L(\lambda) = 0$ موهومی محض باشند.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۴. در چه صورت چند جمله‌ای مشخصه $L(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \alpha\lambda + 3$ از یک معادله دیفرانسیل پایدار است؟

الف. وقتی که $\alpha < 0$ ب. در صورتیکه $-3 < \alpha < 2$

ج. وقتی که $\alpha > 0$ د. وقتی که $\alpha > \frac{3}{2}$

۱۵. کدام گزینه در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم خطی همگن $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' + y' - 2y = 0$ درست است؟

الف. وقتی که $t \rightarrow \infty$ تمام جوابهای آن به صفر میل می‌کنند.

ب. برخی از جوابهای آن وقتی که $t \rightarrow \infty$ به صفر میل نمی‌کنند.

ج. تمام جوابهای آن وقتی که $t \rightarrow \infty$ به ∞ میل می‌کنند.

د. چند جمله مشخصه آن پایدار است.

۱۶. اگر تمام جوابهای دستگاه خودگردان $x' = Ax$ ($x \in R^n$ و A ماتریس $n \times n$ ثابت است) کراندار باشد با چه شرایطی دستگاه

مختل شده $x' = (A + B(t))x$ نیز دارای جوابهای کراندار است؟

الف. $\|B(t)\| < \infty$ ب. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$

ج. $\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$ د. $\int_0^\infty \|B(t)\| dt = 0$

۱۷. در مورد جوابهای معادله $u' = 0$ کدام گزینه درست است؟

الف. مجانباً پایدار می‌باشند. ب. قویاً پایدار می‌باشند.

ج. قویاً پایدار نمی‌باشند. د. هم قوی پایدار و هم مجانباً پایدار می‌باشند.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی)

۱۱۱۱۰۵۱

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۸. در مورد تابع $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$ کدام گزینه درست است؟

الف. در صفحه، معین مثبت است. ب. در R^3 ، معین مثبت است.

ج. در R^3 ، نیمه معین مثبت است. د. در صفحه، نیمه معین مثبت است.

۱۹. کدام گزینه در مورد جوابهای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $u'' + w^2 u = \cos wt$ ($w > 0$) درست است؟

الف. تمام جوابها بیکران هستند. ب. تمام جوابها کراندار هستند.

ج. جوابهای آن به صورت توابع مثلثاتی است. د. این معادله دارای جواب نمی باشد.

۲۰. اگر بعضی جوابهای معادله $u'' + a(t)u = 0$ غیرنوسانی باشند و $b(t) \leq a(t)$ در مورد جوابهای معادله $u'' + b(t)u = 0$

کدام گزینه درست است؟

الف. همه جوابهای آن نوسانی هستند. ب. همه جوابهای آن غیرنوسانی هستند.

ج. بعضی جوابهای آن غیرنوسانی می باشد. د. در مورد جوابها این معادله نمی توان اظهار نظر کرد.

«سؤالات تشریحی»

* بارم هر سؤال ۲ نمره.

۱. تمام توابع پیوسته نامنفی مانند $u(t)$ را روی $[0, 1]$ پیدا کنید که در آن $\forall t, 0 \leq t \leq 1, u(t) \leq \int_0^t u(s) ds$.

۲. اگر ϕ یک ماتریس اصلی دستگاه خطی همگن مرتبه اول $x' = A(t)x$ باشد ثابت کنید که ψ یک ماتریس اصلی دستگاه الحاقی

$x' = -A^T(t)x$ است اگر و تنها اگر ماتریس نامنفرد و ثابتی وجود داشته باشد که $\psi^T \phi = c$

| | |
|---|---------------------------------------|
| نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل | تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ |
| رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (محض - کاربردی) | زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه |
| ۱۱۱۱۰۵۱ | آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗ |
| کد سری سؤال: یک (۱) | استفاده از: — |
| | مجاز است. |

۳. اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ ثابت کنید که جوابهای نابدیهی $u'' + (1 + \varphi(t))u = 0$ نوسانی هستند.

۴. نشان دهید که رونسکی دو جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $a_0(t)u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u = 0$ و $a_0(t) \neq 0$ برابر است با:

$$w(t) = C \exp\left[-\int \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right]$$

۵. با استفاده از تقریب اول پایداری جواب صفر $x_1(t) \equiv 0$ ، $x_2(t) \equiv 0$ دستگاه

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 8 \sin x_2 \\ x_2' = 2 - e^{x_1} - 3x_2 - \cos x_2 \end{cases}$$

را بررسی

نمائید.