کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی

استاد مربوطه : مهندس رزمی

وب سایت انجمن مهندسی دانشجویان ایران

Subject:
Year. Month. Date. / /

جزوه : (کاربرد ریاضی در مهندسی شیمی)

فرموله نمودن و مدلسازی در مسائل مهندسی شیمی :

یکی از روش‌های متداول جهت بررسی و مطالعهٔ تأثیر متغیرهای سیستم و اثر متقابل آنها بر هم استفاده از مدل ریاضی (mathematical model) است.

منظور از مدل ریاضی یافتن معادله و یا معادله‌هایی است که بتوان تأثیر پارامترها و متغیرهای مختلف بر روی پاسخ و رفتار سیستم نشان دهد.

مدلسازی ریاضی سیستم‌ها و فرآیندهای مختلف بر اساس قوانین بقا (پیوستگی، جرمی، ترمودینامیکی و سینتیکی) می‌باشد. همچنین می‌توان از سینتیک و رفتار هیدرودینامیکی مسئله تحت عنوان معادلات سرعت کمک گرفت. برای مدلسازی ریاضی مراحل مختلفی وجود دارد که به صورت زیر بیان می‌گردد:

۱) شناخت دقیق فیزیک مسئله و کلیه شرایط فیزیکی حاکم بر آن.

۲) تعیین پارامترهای مستقل و غیرمستقل در سیستم‌های کارتزین (x, y, z, t)، سیستم‌های استوانه‌ای (R, θ, z, t) و سیستم‌های کروی (R, θ, ϕ, t).

۳) تعیین خصوصیات سینتیکی و فیزیکی و شیمیایی سیستم و گسترهٔ تغییرات آنها.

Subject:
Year: Month: Date:

۴) انتخاب سیستم یا حجم کنترل مناسب (سیالاتی، حرارتی، سینتیکی)

۵) انتخاب قوانین کلی حاکم بر سیستم

۶) قرارداد روابط و قوانین خاص در قوانین فوق

۷) فرضیات ساده منطبق بر فیزیک مسئله

۸) تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی مناسب (شرایط حرارتی، سیالاتی، جرمی، سینتیکی)

۹) انتخاب روش حل مناسب برای حل معادلات

۱۰) تعبیر و تجزیه و تحلیل سیستم

سیستم‌هایی که نقاط تابع زمان باشند و در آن‌ها مختصات مکانی وجود نداشته باشد یا همه نقاط یکسان تلقی می‌شوند و آن سیستم‌ها را به سیستم‌های موسوم به لامپد (Lumped) در نظر می‌گیرند. به عنوان مثال: گرم شدن یک کره ولی کوچک که ضریب هدایت حرارتی آن بالا است می‌توان یک سیستم با مدل موسوم به لامپد در نظر گرفت. مثلاً در این حالت اختلاط کامل موجود بوده و دما در تمام نقاط و در تمام شیرهای تانک و توزیع دمایی در شیرها مختلف وجود ندارد. هم چنین چون اختلاط کامل است از نظر سینتیکی سیستم یکنواخت و دما فقط تابع زمان خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date.

معادلات تعادل:

۱) قانون تعادل جرم.
۲) قانون تعادل انرژی.
۳) قانون تعادل ترمودینامیکی (تعادل انرژی).

۱) قانون تعادل جرم:

$$\underbrace{\Delta w_i}_{} - R_i = \frac{dM_i}{dt}$$

تفاضل دبی جرمی ورودی و خروجی از جزء i

مشتق جرم

شدت ازبین رفتن یا تولید جزء i در واکنش‌های شیمیایی

۲) قانون تعادل انرژی:

$$\Delta E = Q - W$$

مجموع انرژی‌های سیستم (داخلی، جنبشی، پتانسیل)

مجموع حرارت جذب شده توسط سیستم

مجموع کارهای انجام شده

۳) قانون تعادل ترمودینامیکی (تعادل آنتروپی):

میزان حرارت جذب شده

$$\Delta(S_i w_i) + \frac{q}{T} + S_{gen} = \frac{dS}{dt}$$

تفاضل آنتروپی ورودی و خروجی همراه با دبی جرمی

میزان آنتروپی تولیدی

مجموع تغییرات آنتروپی

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

مثال: کره‌ی فلزی به شعاع R_0 با دمای ابتدای t_0 از کوره‌ای در آمده و با هوا با دمای t_∞ سرد می‌شود. اگر $t_\infty < t_0$ باشد توزیع دما در داخل کره را بیابید.

الف) فرض کنید K بزرگ و R_0 کوچک باشد. $(R_0\downarrow , K\uparrow)$

ب) فرض کنید K بزرگ نباشد و R_0 هم کوچک نباشد. $(R_0\uparrow , K\downarrow)$

حل الف) حاصل این فرض یعنی اینکه اختلاط کامل دمای وجود دارد (یعنی در سیستم یکسان است) در شعاع‌های مختلف توزیع دما وجود نخواهد داشت. در نتیجه سیستم لامپد خواهد بود دما فقط تابع زمان خواهد بود.

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta W \quad \xrightarrow{\text{فاقد کار}} \quad \Delta E = \Delta Q$$

$$\longrightarrow -\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho\, C_p \frac{dT(t)}{dt} = 4\pi R_0^2 h\,(T(t) - T_\infty)$$

اگر: $\dfrac{R_0 \rho \cdot C_p}{3h} = \beta \quad \xrightarrow{\text{آنگاه}} \quad \beta \dfrac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_\infty$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{T_\infty - T_t}{\beta}$$

$$T(t=0) = T_0$$

در این شرایط مرزی بررسی می‌کنیم چون دیفرانسیل زمان است یعنی دما در زمانیکه صفر است، T_0 است.

Subject:
Year　Month　Date

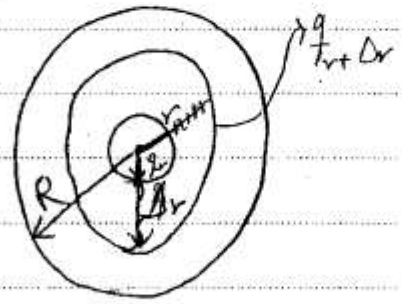
جواب ب) با فرض دوم می‌توان نتیجه گرفت که اختلاط کامل در سیستم از نظر سینتیکی مقصود نبوده

از آنجائیکه به هیچ همزنی در سیستم مقصود نیست پس در هر نقطه‌ای خاص مقصود در دیدن آنکه

توزیع دمای در شعاع وجود دارد در نتیجه می‌توان گفت که دما تابع شعاع و زمان خواهد بود.

$$\underbrace{4\pi r^2 \Delta r\, \rho \cdot C_p \cdot T(r,t+\Delta t) - 4\pi r^2 \Delta t\, \rho \cdot C_p \cdot T(r,t)}$$

باید حجم بدست باید　$h \cdot A$



$$\longrightarrow = 4\pi r^2 q_r \Delta t - 4\pi r^2 q_{r+\Delta r} \cdot \Delta t$$

$$\begin{cases} \Delta t \longrightarrow 0 \\ \Delta r \longrightarrow 0 \end{cases}$$

معادله را بر $4\pi \Delta r \cdot \Delta t$ تقسیم نموده برای اینکه بتوانیم تعریف مشتق نسبت به آنها داشته باشیم.

$$\longrightarrow \rho \cdot C_p \frac{T(r,t+\Delta t) - T(r,t)}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{r^2 q_{r+\Delta r} - r^2 q_r}{\Delta r}$$

تعریف مشتق نسبت به زمان

تعریف مشتق نسبت به شعاع

$$\rho \cdot C_p \frac{\delta T(r,t)}{\delta t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}(r^2 q_r)$$

$$\longrightarrow q_r = -K\frac{\delta T}{\delta r} \longrightarrow \rho \cdot C_p \frac{\delta T(r,t)}{\delta t} = \frac{K}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{r^2 \delta T(r,t)}{\delta r}\right)$$

$$\boxed{\frac{K}{\rho \cdot C_p} = \alpha}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\underbrace{\frac{\delta T(r,t)}{\delta t}}_{} = \frac{\alpha}{r^2}\underbrace{\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{r^2 \cdot \delta T(r,t)}{\delta r}\right)}_{}$$

نسبت به زمان دیفرانسیل درجه ۱ است پس یک شرط مرزی می‌خواهد.

نسبت به شعاع دیفرانسیل درجه ۲ است پس دو شرط مرزی می‌خواهد

$$\{ T(r,0) = T_0$$ شرایط اولیه

$$T(0,t) = \text{محدود} \xrightarrow{\text{به معنای}} \frac{\delta T(0,t)}{\delta r} = 0$$ شرایط مرزی ①

$$-K\frac{\delta T(R_0,t)}{\delta r} = h\left(T(R_0,t - T_\infty)\right)$$ شرایط مرزی ②

مثال: سیالی با دمای t_0 و سرعت V در لوله‌ای با شعاع R_0 و با دمای دیواره‌ی ثابت جاری است اگر t_0 بزرگتر از (t_w) و ضریب انتقال حرارت جابجایی بین سیال و سطح داخلی لوله h باشد توزیع دما را بیابید.

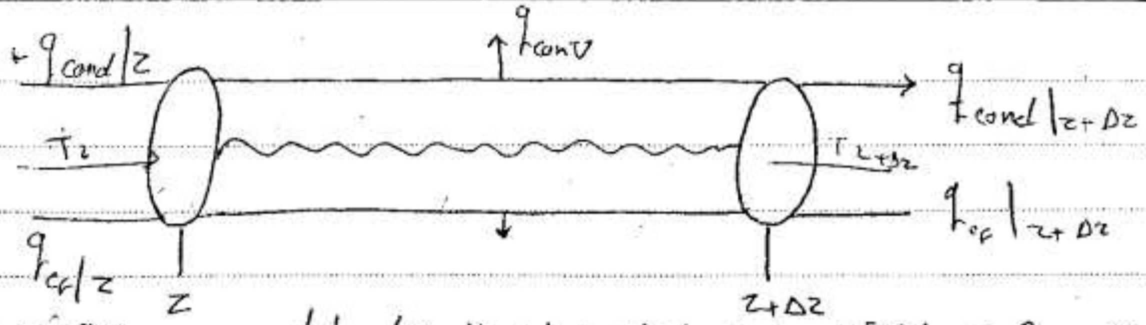
دما فقط تابع طول

الف) جریان درهم باشد. سه نکته: در امتحان الف و ب را نمی‌دهد و ما باید خودمان بفهمیم که به دلیل وجود سرعت در صورت سؤال باید درهم و غیردرهم را بسنجیم.

یعنی: ۱) اختلاط کامل باشد.

۲- یعنی دما تابع زمان باشد و توزیع شعاعی نداریم.

۳) اگر سرعت بالا باشد که جریان درهم است پس اختلاط کامل داریم.



q_{conv} : انتقال حرارت جابجایی بین سیال و دیواره‌ی لوله

q_{cond} : انتقال حرارت هدایتی در طول سیال بلحاظ نفوذ مولکولی (از نوع حرارتی)

q_{ref} : انتقال حرارتی است از جنس آنتالپی به لحاظ سرعت سیال.

$\Delta E = \Delta Q - \Delta W$

$\Rightarrow \Delta Q = 0$

اختلاط کامل یافته: $\Delta E = \Delta W = 0$

بیلان: $q_{cond}|_z + q_{ref}|_z - q_{cond}|_{z+\Delta z} - q_{ref}|_{z+\Delta z} - q_{conv} = 0$

$$\rightarrow -K\pi R^2 \cdot \frac{\partial T(z)}{\partial z} + \left(V \cdot \pi R^2 \cdot \rho \cdot C_p \cdot T(z)\right) - \left(-K\pi R^2 \cdot \frac{\partial T(z+\Delta z)}{\partial z}\right)$$

$$- \left(V \cdot \pi \cdot R_0^2 \cdot \rho \cdot C_p \cdot T(z+\Delta z)\right) - 2\pi R \cdot \Delta z\, h \left(\underbrace{\frac{T(z)+T(z+\Delta z)}{2}}_{\text{همان تعریف } T_{ref} \text{ است.}} - T_w\right)$$

$$\frac{T(z+\Delta z)+T_z}{2} = T_{ref}$$

$$\rightarrow K \frac{\frac{\partial T(z+\Delta z)}{\partial z} - \frac{\partial T(z)}{\partial z}}{\partial z} - V \cdot \rho \cdot C_p \frac{T(z+\Delta z)-T(z)}{\partial z} = \frac{2h}{R_0}\left(\frac{T(z+\partial z)+T(z)}{2} - T_w\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون مشتق بالایی را می‌خواهیم:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{T(z+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{dT(z)}{dz}$$

$$\longrightarrow T(z+\Delta z) \underset{\Delta z \to 0}{\simeq} T(z) \quad , \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{T(z+\delta z)}{\delta z} - \frac{T(z)}{\delta z}}{\delta z} = \frac{d^2T(z)}{dz^2}$$

$$\longrightarrow K \frac{d^2T(z)}{dz^2} - V_0 \cdot \rho \cdot C_p \frac{dT(z)}{dz} - \frac{2h}{R_0}(T(z) - T_w)$$

اگر اختلاف سیال ورودی و خروجی ناچیز باشد و سیال به مقدار کمی سرد شود پس می‌توان گفت

که: $K \frac{d^2(z)}{dz} = 0$

$$\longrightarrow V_0 \cdot \rho \cdot C_p \frac{dT(z)}{dz} = \frac{2h}{R_0}(T(z) - T_w)$$

یک شرط مرزی

$$\text{if} \begin{cases} T(z=0) = T_0 \\ \text{یا} \\ T(z \to \infty) = T_w \end{cases}$$

$(\infty, t), (0, t)$ می‌شوند

نوشته می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کاربرد ریاضی در مهندسی شیمی

ب) جریان آرام با رکد:

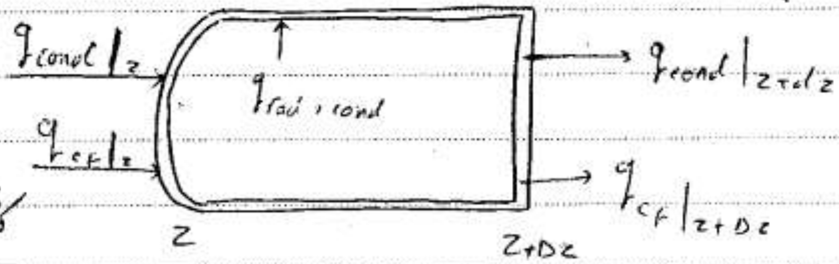
سرعت متوسط

$$V_r = 2V_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

شعاع، طول ← متغیراند

V_z : سرعت نقطه‌ای یا محلی

$$T = f(z,r)$$



$$V_z(2\pi r\Delta r)\rho C_p T(r,z) - V_z(2\pi r\Delta r)\rho C_p T(r,z+\Delta z)$$

$$+2\pi r\Delta r\, q_z|_z - 2\pi r\Delta r\, q_z|_{z+\Delta z} + 2\pi r\Delta r\, q_r|_r - 2\pi r\Delta r\, q_r|_{r+\Delta r} = 0$$

$\xrightarrow{\text{با تقسیم بر } 2\pi\Delta r\Delta z}$

$$-V_z\rho C_p r\frac{T(r,z+\Delta z)-T(r,z)}{\Delta z} - \frac{(rq_z)|_{z+\Delta z}-(rq_z)|_z}{\Delta z}$$

$$-\frac{(rq_r)_{r+\Delta r}-(rq_r)_r}{\Delta r} = 0 \qquad \begin{cases}\Delta r \to 0\\ \Delta z \to 0\end{cases}$$

$$-V_z\rho C_p r\frac{\partial T(r,z)}{\partial z} - \frac{\partial(rq_z)}{\partial z} - \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} = 0$$

Subject
Year. Month. Date. / /

$$V_z \rho \cdot c_p \frac{\partial T(r,z)}{\partial z} = -\frac{\partial (q_z)}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r q_r)$$

$$q = -K\nabla T \qquad q_r = -K\frac{dT}{dr} \qquad q_z = -K\frac{dT}{dz}$$

$$2V \cdot \rho \cdot c_p\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{\partial T(r,z)}{\partial z} = K\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T(r,z)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial z^2}\right)$$

در راستای r   در راستای z

$$-K\frac{\partial T(R,z)}{\partial r} = h\left(T(R,z) - T_\omega\right)$$

$$\begin{cases} T(0,z) = \text{محدود}, \quad T(r,0) = T_0, \quad T(r,\infty) = T_\omega \\ \dfrac{\partial T(0,z)}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

[illegible]:

$$\overset{\text{تغییر}}{\frac{Db}{Dt}} = \frac{\partial b}{\partial t} + V_x\frac{\partial b}{\partial x} + V_y\frac{\partial b}{\partial y} + V_z\frac{\partial b}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{V_x}i + \vec{V_y}j + \vec{V_z}k)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V \cdot \nabla b = \frac{\partial b}{\partial t} + V \cdot q_{rad}$$

Subject
Year Month Date

معادلات انتقال حرارت (جرم -) مومنتوم:

الف- معادله نفوذ در انتقال حرارت:

$$\rho \cdot c \frac{DT}{Dt} + \nabla q = u'''$$

$$q = -K \nabla T$$

$$\Longrightarrow \rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} + \nabla(-K \nabla T) = u'''$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \nabla K \cdot \nabla T + K \nabla^2 T + \underbrace{u'''}_{\text{انرژی با حرارت تولیدی}}$$

$$\begin{cases} K = cte & \nabla K = 0 \end{cases}$$

$$\rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T + u'''$$

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho \cdot c_p}}$$

استوانه‌ای: $r\ \theta\ z$

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + V_r \frac{\partial(\,)}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial(\,)}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial(\,)}{\partial z}$$

کروی: $r\ \theta\ \phi$

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + V_r \frac{\partial(\,)}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial(\,)}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial(\,)}{\partial \phi}$$

∇^2:

کارتزین:

$$\nabla^2 = \frac{\partial(\,)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\,)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\,)}{\partial z^2}$$

جا خالی ← جای قرار دادن متغیرها

Subject
Year Month Date ( )

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

استوانه‌ای:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,\partial(\ )}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$$

or

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(\ )}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$$

کروی:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(\ )}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(\ )}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2(\ )}{\partial\phi^2}.$$

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{u'''}{\rho c}}$$

برای جامدات و بدون تولید حرارت ، k ثابت باشد. $(v_x = v_y = v_z = 0)$

$\rightarrow u''' = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T$$

سیال تراکم ناپذیر (k و ρ ثابت) جریان آرام و تولید نباشد و جریان یکنواخت باشد.

$$v\cdot\nabla T = \alpha\nabla^2 T$$

جامدات حالت یکنواخت (k و ρ و C_p ثابت باشد).

$$\alpha\nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho\cdot C_p} = 0 \xrightarrow[u'''=0]{\text{اگر تولید نباشد}} \alpha\nabla^2 T = 0$$

Subject
Year Month Date

حل مثال (قسمت ب)

$$\rho \cdot C_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \cancel{V_r \frac{\partial T}{\partial r}} + \cancel{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}}\right) = K\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}}\right] + \cancel{u'''}$$

فرضیات
$$\begin{cases} V_r = V_\theta = V_\phi = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = \dfrac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = K\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

$$\longrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

$T = f(r,z)$ دما تابعی از شعاع و z باشد ،

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \cancel{V_r\frac{\partial T}{\partial r}} + \cancel{\frac{V_\theta}{r}}\frac{\partial T}{\partial\theta} + V_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \cancel{u'''/\rho \cdot c_p}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$T(r,z)$

$$V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

$$2 V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

جرم — رژیم استوانه‌ای

مثال: دیواره یک راکتوری به شعاع R_0 و طول L با کاتالیست پوشش داده شده است این دیواره در دمای ثابت T_w بوده و گاز A با غلظت ورودی متوسط C_A) و با سرعت V و با دمای ثابت است راکتور عبور می‌کند که گاز A روی سطح کاتالیست تحت یک واکنش غیر بازگشتی درجه اول $A \to B$ تجزیه می‌شود معادله دیفرانسیلی را با شرایط مرزی بدست آورید که با حل آن توزیع غلظت در حالت پایدار در این راکتور بدست آید.

$c = f(r,z)$ $\qquad v = v_z$ $\qquad \Leftarrow$ با این شرایط

$$\cancel{\frac{\partial c}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial c}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right]$$

$$v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right]$$

شرایط مرزی $\Rightarrow$ $C(r,0) = C_i$ $\qquad \frac{\partial (0,z)}{\partial r} = 0$ or کراندار

$$-D \frac{\partial c(R,z)}{\partial r} = K \cdot c$$

از آنجایی که غلظت به ازاء طول راکتور و شعاع آن اختلاط کامل ندارد پس می‌توانیم که غلظت $f(r,z)$ است و از آنجایی که سرعت محلی ای و یا نقطه‌ای به ازاء طول راکتور موجود است پس در سیستم v_z خواهیم داشت و از آنجایی که راکتور را به عنوان یک لوله فرض کرده‌ایم پس برای سیستم استوانه‌ای معادله مربوطه آن را می‌نویسیم در این رابطه نوشته شده v_r و v_θ صفر است گرادیان غلظت نسبت به زاویه برابر با صفر می‌شود پس با اطلاعات موجود معادله را می‌نویسیم برای حل

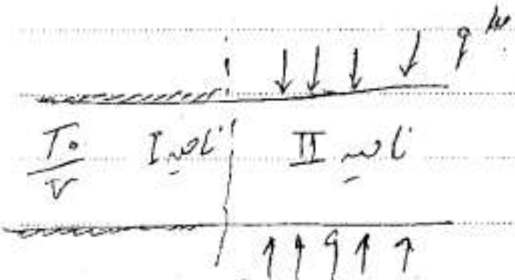
اگر استوانه یک استوانه چرخان باشد ← v_θ داریم و θ

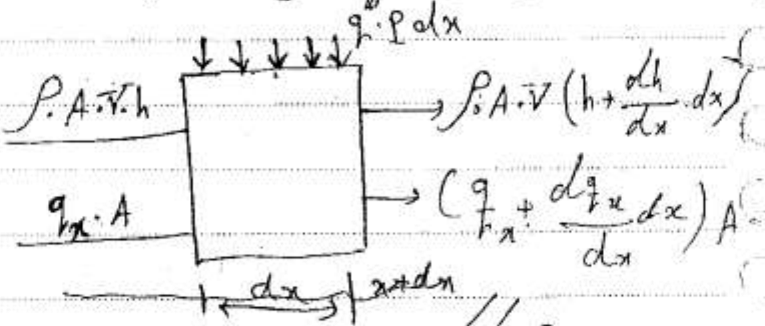
اگر در تغییر کند — زمان هم θ داریم و هم t
غیر یکنواخت

Subject:
Year: Month: Date:

چنین معادله‌ای نیاز به شرایط مرزی است. زمانی که طول محدود است غلظت همان غلظت اولیه است
و زمانی که طول بی‌نهایت است غلظت همان غلظت اولیه است و تغییرات غلظت زمانی که شعاع صفر است در برابر صفر است. از شرایط مرزی
و از آنجا که واکنش غیر بازگشتی روی سطح کاتالیست یک واکنش درجه اول است. که از A، B تولید می‌گردد
می‌توان گفت که $r_A = -k C_A$ یعنی انتقال جرمی که بواسطه تغییرات غلظت
A انجام می‌گیرد برابر با سرعت واکنش است که A را به B تبدیل می‌کند ($A \rightarrow B$)

مثال: سیالی با سرعت خطی ثابت V در لوله‌ای با سطح مقطع A و محیط P جریان دارد مطابق
به شکل زیر نیمی از لوله عایق‌بندی شده $x<0$ و نیمی دیگر شار حرارتی q'' را با اندازه
به ازای واحد سطح لوله به دما منتقل می‌شود در حالت یکنواخت معادله
دیفرانسیلی را بدست آورید که از حل آن بتوان دمای سیال را در ناحیه ۲ لوله بدست آوریم.
(فرض کنید شعاع لوله کوچک است).





چون شعاع کوچک است توزیع دما در لوله در جهت شعاع می‌توان ... فرض کرد پس می‌توان
نوشت:

$$\rho \cdot A \cdot V \cdot h + q_x \cdot A - \rho \cdot A \cdot V\left(h+\frac{dh}{dx}dx\right) - \left(q_x+\frac{dq_x}{dx}dx\right)A + q'' p\, dx = 0$$

(A) $$-\frac{A\, dq_x}{dx} - \rho \cdot A \cdot V \frac{dh}{dx} + q'' p = 0 \qquad (1)\ dh = c\, dT$$

(2) $$q_x = -k\frac{dT}{dx}$$

(1),(2) در A

$$\underbrace{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\rho \cdot c \cdot V}{k}\frac{dT}{dx}}_{} + \frac{q'' p}{k \cdot A} = 0$$

ناحیه ۱

ناحیه ۲

Subject:

Year: Month: Date: ( )

$$\rho . c . \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + q'''$$

$$\rho . c \left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}^{\,0} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + \cancel{V_y \frac{\partial T}{\partial y}} + \cancel{V_z \frac{\partial T}{\partial z}}\right) = K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right) + \frac{q''.P}{A}$$

پایدار

$$\rho . c . V . \frac{dT}{dx} = k\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q''.P}{A} = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{\rho . c . V}{K}\frac{dT}{dx} + \frac{q''.P}{K.A}$$

ناحیه ۱ ناحیه ۲

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho . c . V}{k}\frac{dT}{dx} = \frac{q''.P}{K.A} \qquad (B)$$

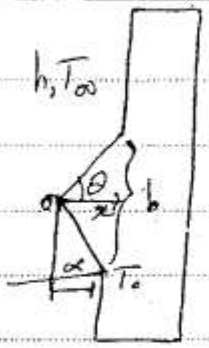
$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho . c . V}{K}\frac{dT}{dx} = 0$$ اولی باشد: $-\infty < x < 0$

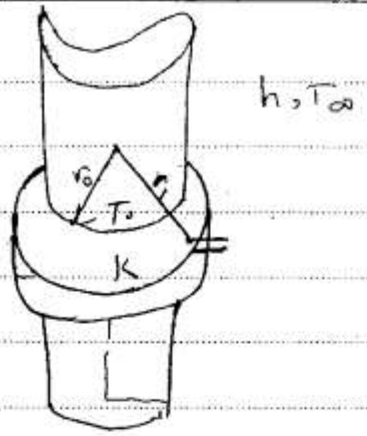
(B) دومی باشد: $0 < x < \infty$

(H.W

مثال: اگر در سیستم‌های زیر تجمع وجود داشته باشد و انتقال حرارت یک بعدی باشد معادله دیفرانسیلی را بیابید که این میزان انتقال حرارت را فرموله کند. (سیستم ناپایدار).

Subject.
Year. Month. Date. ( )





Subject:
Year. Month. Date.

فصل دوم:

معادلات دیفرانسیل معمولی:

• از دسته معادلاتی هستند که در مسائل مهندسی با آن ها برخورد می شود هدف از یک معادله دیفرانسیل یافتن بین متغیرها بدون وجود مشتقات است بطور دیگر این رابطه و یا معادله بتواند معادله دیفرانسیل را ارضاء کند.

روش حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرحله اول:

الف) روش جداسازی (Sepration of variables)

$$f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy = 0$$

طرفین را بر $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$

مثال: $(4x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$

حل: $x(4+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{4+y^2}dy = c$$

Subject:
Year: Month: Date:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(4+y^2)=0$$

$$\ln\sqrt{(1+x^2)(4+y^2)}=c$$

$$(1+x^2)(4+y^2)=e^{2c}=C$$

معادلات دیفرانسیل کامل:

اگر $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$$ معادله دیفرانسیل کامل

جواب:

$$\int M\,dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dx\right)\right]dy=c$$

مثال:

$$(3x^2+y\cos x)dx+(\sin x-4y^3)dy=0$$

$M(x,y)=3x^2+y\cos x \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\cos x$

$N(x,y)=\sin x-4y^3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\cos x$

کامل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\underbrace{\int (3x^2+y\cos x)\,dx}_{\text{نسبت به x انتگرال}} + \int\Big[\underbrace{\sin x - 4y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int (3x^2+y\cos x)\,dx}_{\text{نسبت به y انتگرال}}\Big]dy = c$$

$$x^3 + y\sin x + \int\Big[\sin x - 4y^3 - \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y\sin x)\Big]dy =$$

$$x^3 + y\sin x - y^4 = c$$

روش فاکتور انتگرال:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{کامل نیست}$$

در صورتیکه یک عامل μ یافت شود که با ضرب آن در معادله دیفرانسیل تبدیل به معادله کامل شود خواهیم داشت:

$$\mu(M)\,dx + \overset{\text{نو}}{\mu}(N)\,dy = 0$$

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \rightarrow \mu = e^{\int f(x)dx}$$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \rightarrow \mu = e^{\int f(y)dy}$$

مثال: $y\ln y\,dx + (x-\ln y)\,dy = 0$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \ln y + 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial y} = 1+\ln y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1-(\ln y+1)}{y\ln y} = -\frac{1}{y}$$

PAPCO

$\int \ln y\,dx - \int \ln y\, d(\ln y) - c \rightarrow \int \ln y\,dx - \frac{(\ln y)^2}{2} = c \rightarrow x\ln y - \frac{(\ln y)^2}{2} = c$

Subject $\ln y = u$ $\frac{1}{y} dy = du$

Year Month Date

$$\mu = e^{\int f(y)\,dy} = e^{\int \frac{dy}{-y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

$$\int \ln y\,dx + \int \left[\frac{x - \ln y}{y} - \frac{\partial}{\partial y}\int \ln y\,dx\right] dy = C_1 \rightarrow$$

$$x\ln y - \int \frac{\ln y}{y}\,dy = C_1$$

$\int \ln y\,dx + \int \left[\frac{x - \ln y}{y} - \frac{\partial}{\partial y}(x\ln y)\right] dy = c$

$\int \ln y\,dx + \int \left[\frac{x}{y} - \frac{\ln y}{y} - \frac{x}{y}\right] dy = c$

$$x\ln y - \int \ln y\, d(\ln y) = C_1$$

$\int \ln y\,dx - \int \frac{\ln y}{y}\,dy = c \rightarrow \int \ln y\,dx - \int \frac{\ln y}{y}\,dy = c$

$$x\ln y - \frac{(\ln y)^2}{2} = C_1 \longrightarrow 2x\ln y - (\ln y)^2 = C_1$$

حل: $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$

$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y \qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$\int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + \left[\int \left(x^2 y - \frac{\partial}{\partial y}\int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx\right)\right] dy = C$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int (x^2 y - y x^2)\,dy = C$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = C$$

$\int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + \int \left[x^2 y - \frac{d}{dy}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right] dy = c$

$\int x^3 + xy^2 + x^2 + \int [x^2 y - x^2 y]\,dy = c$

Subject: Year. Month. Date.

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad , \quad \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d\left[\ln x^2 + y^2\right]$$

$$\frac{x dy - y dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

اگر $\dfrac{\dfrac{\delta M}{\delta y} - \dfrac{\delta N}{\delta x}}{N}$ فقط تابعی از x باشد $\longrightarrow \mu = e^{\int f(x) dx}$

اگر $\dfrac{\dfrac{\delta N}{\delta x} - \dfrac{\delta M}{\delta y}}{M}$ فقط تابعی از y باشد $\longrightarrow \mu = e^{\int f(y) dy}$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$\frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d\left[\ln x^2 + y^2\right]$$

$$\frac{x dy - y dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d\left[\ln \frac{x-y}{x+y}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date.

معادلات همگن: حل:

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x)$$

$$y/x = v \longrightarrow y = vx$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \qquad x\,dv - (F(v) - v)\,dx = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dv}{F(v)-v} = c$$

مثال: $(2x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{3xy^2} + \frac{y^3}{3xy^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(y/x)^2}\right) + \frac{1}{3}(y/x)$$

$$v = y/x \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

$$dy = v\,dx + x\,dv \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3v^2} + \frac{1v}{3}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{2}{3v^2} + \frac{v}{3} - v \qquad \frac{x\,dv}{dx} = \frac{2 - 2v^3}{3v^2}$$

$$-\int \frac{2\,dx}{x} = \int \frac{3v^2\,dv}{v^3 - 1} \qquad -2\ln x = \ln(v^3 - 1) + c$$

$$\ln\left[x^2(v^3 - 1)\right] = c \qquad \frac{y^3 - x^3}{x} = e^c \quad c_1$$

$$\boxed{y^3 - x^3 = c_1 x}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$$\frac{y^3-x^3}{x}=e^{c}\quad c_1\qquad y^3-x^3=c_1 x$$

معادلات برنولی :

معادله خطی $\longleftarrow$ $n=0$

مثال: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\cdot y^{n}\quad n\neq 0,1$

با جداسازی متغیرها حل می‌شود $\longrightarrow$ $n=1$

$$\left(v=y^{1-n}\right)$$

$$dv=(1-n)y^{-n}dy \Rightarrow \frac{1}{1-n}y^{n}dv=dy$$

$$\frac{1}{1-n}y^{n}\frac{dv}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$$

بر y^n تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P(x)\cdot y^{1-n}=Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)P(x)\cdot v=(1-n)Q(x)\Rightarrow$$

$$v e^{(1-n)\int P dx}=(1-n)\int Q\cdot e^{(1-n)\int P dx}dx+c$$

$$\frac{dy}{dx}+2xy+xy^{4}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}+2xy=-xy^{4}$$

$$P(x)=2x\qquad Q(x)=x\qquad n=4$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$v = y^{1-n} = y^{-3} \qquad dv = -3y^{-4}dy$$

$$dy = -\frac{1}{3}y^{4}dv \qquad -\frac{1}{3}y^{4}\frac{dv}{dx} + 2xy = -xy^{4}$$

$$v\cdot e^{-3\int 2x\,dx} = 3\int x e^{-3\int 2x\,dx} + c$$

جزء به جزء

$$v\cdot e^{-3x^{2}} = -\frac{1}{2}e^{-3x^{2}} + c \qquad v = y^{-3}$$

$$(y^{3}e^{3x^{2}})\left(\frac{1}{y^{3}}e^{-3x^{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}e^{-3x^{2}} + c\right)(y^{3}e^{3x^{2}})$$

ضرب در عبارت

$$\boxed{-\frac{1}{2}y^{3} + cy^{3}e^{3x^{2}} = 1}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^{4} \qquad P(x) = \frac{1}{3} \qquad Q(x) = \frac{1}{3}(1-2x)$$

$$n = 4$$

$$v = y^{1-n} \qquad v = y^{-3}$$

$$\frac{dv}{dx} - v = 2x-1 \qquad ve^{-x} = \int (2x-1)e^{-x}dx + c$$

$$-(2x-1)e^{-x} + \int 2e^{-x}$$

$$\frac{1}{y^{3}}e^{-x} = \int (2x-1)e^{-x}dx + c$$

$$-2e^{-x}$$

$$\frac{1}{y^{3}} = (-1-2x+ce^{x}) \qquad \boxed{y^{3}(1-2x+ce^{x}) = 1}$$

Subject:
Year. Month. Date.

معادلات دیفرانسیل خطی:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=R(x)$$

همگن $R(x)=0$

غیرهمگن $R(x)\neq 0$

$$\frac{d}{dx}=D \qquad \frac{d^2}{dx^2}=D^2 \qquad \frac{d^n}{dx^n}=D^n$$

$$\left[a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+\cdots a_n(x)\right]y=R(x)$$

$$\phi(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$$

$$\phi(D)y=R(x) \qquad \phi(D)y=0 \qquad R(x)=0$$

$y_c(x)$ جواب همگن

$$\phi(D)y=R(x)$$

$$y=y_c(x)+y_p(x)$$ جواب غیرهمگن است

مجموعه n تابع $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ را وابسته خطی گویند اگر n ثابت c_1 تا c_n به نحوی وجود داشته باشد که همگی با هم صفر نباشند یعنی لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد:

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0$$

در غیر اینصورت مجموعه را مستقل خطی گویند در صورتیکه تمام توابع مشتق پذیر باشند

Subject:
Year. Month. Date.

دترمینال ماتریس زیر که راسی کیان توابع y_1 تا y_n نامیده می شود مخالف صفر باشد.
ازاین روش مشخص نمی شود. فقط برای تشخیص مستقل و وابسته.

دترمینال

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = dt = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{مستقل خطی}$$

$if = 0$ وابسته خطی

$d = 0$ وابسته
$d \neq 0$ مستقل

روشهای حل معادلات دیفرانسیل:

الف) غیراپراتوری: همگن / غیرهمگن

همگن:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots a_n) y = 0 \quad \text{or} \quad a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

تعداد ریشه ها: $m_1, m_2, \cdots, m_n$

$$a(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n) = 0$$

سه حالت داریم:

۱- تمام ریشه های m مقادیر حقیقی نابرابر داشته باشند:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \cdots + C_n e^{m_n x}$$

۲) بعضی از ریشه ها مختلط باشند:

$m = a \pm bi$

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + i C_2 \sin bx)$$

۳) بعضی از ریشه ها حقیقی مساوی باشند مثلاً K تا ریشه از m_1 برابر باشند

$m_1=m_2=m_3=-2 \quad m_4=1$

$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_3x^2e^{-2x}+c_4e^{x}$

Subject: Year. Month. Date.

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_kx^{k-1})e^{mx}$$

مثال: $(2D^3-D^2-5D-2)y=0$ حقیقی نابرابر

حل $\rightarrow 2D^3-D^2-5D-2=0 \rightarrow (2D+1)(D+1)(D-2)=0$

$\rightarrow D=-\frac{1}{2} \quad , D=-1 \quad , D=2$

$\rightarrow y=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$

مثال: $(D+2)^3(D-3)(D^2+2D+5)y=0$

$D=\underbrace{-2,-2,-2}$, $\underbrace{-1\pm2i}$, 3

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-2x}+c_4e^{3x}+e^{-x}(c_5\cos2x+ic_6\sin2x)$$

غیرهمگن: $\phi(D)y=R(x)$

$R(x)$	$y(p)$
$fe^{p(x)}$	$ae^{p(x)}$
$f\cos p_x+g\sin p_x$	$a\cos p_x+b\sin p_x$
$f_0x^k+f_1x^{k-1}+\cdots+f_k$	$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_n$
$e^{q_x}(f\cos p_x+g\sin p_x)$	$e^{q_x}(a\cos p_x+b\sin p_x)$

PAPCO

Subject:
Year. Month Date ( )

ادامه جدول:

$R(x)$	$y(p)$
$e^{p_x}(f_0 \cdot x^k + f_1 \cdot x^{k-1} + \dots + f_n)$	$e^{p_x}(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_n)$
$[f_0 x^{k_0} + \dots + f_k]\cos p_x + [g_0 x^k + \dots + g_k]\sin p_x$	$[a_0 x^k + \dots + a_k]\cos p_x + [b_0 x^k + \dots + b_k]\sin p_x$
$e^{q_x}[f_0 x^k + \dots + f_k]\cos p_x + e^{q_x}[g_0 x^k + \dots + g_k]\sin p_x$	$e^{q_x}[a_0 x^k + \dots + a_k]\cos p_x + e^{q_x}[b_0 x^k \dots b_k]\sin p_x$

$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$

مثال: $(D^2-4)y = \sin 2x$

$$D^2-4=0 \rightarrow D=\pm 2 \rightarrow y(c) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

$$\rightarrow y_p = A\sin 2x + B\cos 2x \rightarrow (D^2-4)(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x$$

$$\rightarrow D^2 = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow (D^2-4)\,y_p = [-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4B\cos 2x] = \sin 2x$$

$$\rightarrow -8A\sin 2x - 8B\cos 2x = \sin 2x \rightarrow \begin{cases} -8A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{8} \quad B=0 \\ -8B = 0 \rightarrow y_p = -\frac{1}{8}\sin 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = y_c + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{C_3}{8}\sin 2x$$

نکته: اگر در جواب های y_p جملاتی مشابه با y_c ظاهر شود، جملات مشابه در y_p را در x^n ضرب کرده به نحوی که n کوچکترین توان مثبت است که با ضرب x^n در جملات y_p غیرمشابه با تمام جملات y_c گردد.

Subject:
Year: Month: Date:

مثال: $(D-2)^2 y = e^x + xe^{2x}$

$\rightarrow (D-2)^2 = 0 \rightarrow D = 2, 2 \rightarrow y_c = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$

$(D^2-4D+4)(Ae^x) = e^x + xe^{2x} \rightarrow Ae^x - 4Ae^x + 4Ae^x \rightarrow Ae^x = e^x + xe^{2x}$

$(D-2)^2 y_p = e^x + x.e^{2x}$

$\rightarrow y_{p_1} = Ae^x \rightarrow (D-2)^2 (Ae^x) = e^x + xe^{2x} \rightarrow A = 1$ $(A=1)$

بایم = فقط ثابت

$\rightarrow y_{p_2} = (Bx + c)e^{2x}$ شبیه $c_2 x e^{2x}$ است

برای بدست آوردن ثوابت هم ارز ضرایب دو طرف را برابر قرار دهیم.

چون ضرب e^{2x} برابر Bx است و از طرفی در y_c نیز ضریبی مشابه یعنی $c_2 x$ داریم پس بایستی طبق نکته ی بالا در یک x^n که n کوچکترین توان مثبت است ضرب کرد تا غیر مشابه شود:

$\rightarrow y_{p_2} = (Bx + c)e^{2x} . x^2$

$\rightarrow (D-2)^2 [x^2 (Bx+c)e^{2x}] = e^x + xe^{2x} \rightarrow B = 1/6 , c = 0$ H.W

$\rightarrow y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \underbrace{c_3 e^x}_{y_{p_1}} + \underbrace{1/6\, x^3 c_4 e^{2x}}_{y_{p_2}}$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^x + \frac{c_4}{6} x^3 e^{2x}}$$

روشهای اپراتوری:

جواب غیر همگن { روش کاهش درجه / روش اپراتور معکوس

Subject:
Year. Month. Date.

روش کاهش درجه:

$$\phi(D)y = R(x)$$

$$\rightarrow a_0 (D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)y = R(x)$$

$$\rightarrow a_0 (D-m_2)(D-m_3)\cdots(D-m_n) = y_1$$

$$\rightarrow (D-m_1)y_1 = R(x)$$

$$\rightarrow a_0 (D-m_3)(D-m_4)\cdots(D-m_n) = y_2$$

$$\rightarrow (D-m_2)y_2 = y_1$$

$$\vdots$$

$$y_n$$

روش اپراتور معکوس:

$$\phi(D)y = R(x)$$

$$\phi(D)y_p = R(x) \Rightarrow y_p = \frac{R(x)}{\phi(D)} \quad , \quad \frac{1}{\phi(D)} \text{ اپراتور معکوس}$$

$$\frac{1}{\phi(D)}\left[C_1 R_1(x) + C_2 R_2(x) + \cdots + C_k R_k(x)\right] = C_1 \frac{1}{\phi(D)} R_1(x) + \cdots + \frac{C_k}{\phi_D} R_k(x)$$

Subject:
Year: Month: Date:

$\frac{1}{\phi(D)} R(x)$	y_p
$\left(\frac{1}{D-m}\right) R(x)$	$e^{mx}\int e^{-mx} R(x)\,dx$
$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)} R(x)$	$e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\cdot e^{m_2x}\int e^{-m_2x}\cdot e^{m_3x}\cdots\int e^{-m_{n-1}x} e^{m_nx}\cdot\int e^{-m_nx}R$
$\frac{1}{\phi(D)} e^{p(x)}$	$\begin{cases}\frac{e^{p(x)}}{\phi(p)} & if:\ \phi(p)\neq 0\\ \frac{x^k e^{p(x)}}{\phi(p)} & if:\ \phi(p)=\phi'(p)\cdots\phi^{(k-1)}(p)\end{cases}$
$\frac{1}{\phi(D^2)}\cos(p_x+q)$	$\frac{\cos(p_x+q)}{\phi(-p^2)}$
$\frac{1}{\phi(D^2)}\sin(p_x+q)$	$\frac{\sin(p_x+p)}{\phi(-p^2)}$ $if:\ \phi(-p^2)\neq 0$
$\frac{1}{\phi(D)}\cos(p_x+q)=Re\left[\frac{1}{\phi(D)}e^{i(p_x+q)}\right]$	$Re\left\{\frac{e^{i(p_x+q)}}{\phi(ip)}\right\}$
$\frac{1}{\phi(D)}\sin(p_x+q)=I_m\left[\frac{1}{\phi(D)}e^{i(p_x+q)}\right]$	$I_m\left\{\frac{e^{i(p_x+q)}}{\phi(ip)}\right\}$
$\frac{1}{\phi(D)}x^p=(c_0+c_1D+\cdots+c_kD^k)x^p$	$(c_0+c_1D+\cdots+c_pD^p)x^p$

مشتقات بالاتر از p برای x^p صفر فرض می‌شود.

$\frac{1}{\phi(D)} e^{px} f(x)$	$e^{px}\frac{1}{\phi(D+p)} f(x)$
$\frac{1}{\phi(D)} x f(x)$	$\frac{1}{x\phi(D)} f(x) - \frac{\phi'(D)}{[\phi(D)]^2} f(x)$

PapCo

$(D-1)y=0 \quad \boxed{D=2 \rightarrow y_c = c_1 e^{2x}}$

Subject:
Year: Month: Date:

$(D-2)y_p = e^{x}$

مثال: $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{x} \rightarrow y_p = \frac{1}{D-2} e^{x} \rightarrow y_p = e^{2x}\int e^{-2x}\cdot e^{x}\,dx$

$y_p = e^{2x}(-e^{-x}) = -e^{x}$

$\rightarrow (D-2)y_p = e^{x} \rightarrow y_p = \frac{e^{x}}{D-2}$

$y_p = -e^{x}$

$y = y_c + y_p \rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$

$\rightarrow y_p = e^{mx}\int e^{-mx}\cdot e^{x}\,dx = e^{2x}\int e^{-2x}\cdot e^{x}\,dx = -e^{x}$ $\Big|\ y = c_1 e^{2x} - c_2 e^{x} \quad \boxed{c_2 = -1}$

مثال: $(D^3 + D)y = e^{-2x}\cos 2x$

$\rightarrow y_p = \frac{1}{D^3 + D} e^{-2x}\cos 2x = \frac{1}{(D-2)^3 + (D-2)}\cos 2x \cdot e^{-2x}$

$\rightarrow y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{D^3 - 6D^2 + 13D - 10}\cos 2x$

$\rightarrow y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{D(-2)^2 - 6(-2)^2 + 13D - 10}\cos 2x$

$y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{-4D + 24 + 13D - 10}\cos 2x$

$y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{9D + 14}\cos 2x = e^{-2x}\frac{9D - 14}{(9D+14)(9D-14)}\cos 2x$

$y_p = \frac{e^{-2x}}{-520}(-18\sin 2x - 14\cos 2x)$

Subject:
Year. Month. Date.

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{260}\left(9\sin 2x + 7\cos 2x\right)$$

$$\rightarrow D^3 + D = 0 \rightarrow D = 0\,,\ \pm i$$

$$\Rightarrow y_c = C_1 + \left(C_2 \cos x + i\, C_3 \sin x\right)$$

$$\Longrightarrow y = C_1 + \left(C_2 \cos x + i\, C_3 \sin x\right) + C_4\left[\frac{e^{-2x}}{260}\left(9\sin 2x + 7\cos 2x\right)\right.$$

Subject
Year Month Date ( )

روش استوانه سری: (Frobenius)

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

$y = x^{\beta}($

مثال: $4xy'' + 2y' + y = 0 \qquad y = \sum_{K=0}^{\infty} C_K x^{K+\beta}$

$y' = \sum_{K=0}^{\infty} C_K (K+\beta) x^{K+\beta-1}$

$y'' = \sum_{K=0}^{\infty} C_K (K+\beta-1)(K+\beta) x^{K+\beta-2}$

$4x \sum_{K=0}^{\infty} C_K (K+\beta)(K+\beta-1) x^{K+\beta-2} + 2 \sum_{K=0}^{\infty} C_K (K+\beta) x^{K+\beta-1}$

$+ \sum_{K=0}^{\infty} C_K x^{K+\beta} = 0$

$4\left[C_0(\beta)(\beta-1)x^{\beta-1} + C_1(\beta+1)\beta x^{\beta} + \dots\right]$

$+ 2\left[C_0 \beta x^{\beta-1} + C_1(\beta+1)x^{\beta} + \dots\right] + C_0 x^{\beta} + C_1 x^{\beta+1} + \dots = 0$

ضرائب $x^{\beta-1}$ $\qquad 4C_0\beta(\beta-1) + 2C_0\beta = 0$

" x^{β} $\qquad 4C_1\beta(\beta+1) + 2C_1(\beta+1) + C_0 = 0$

" $x^{\beta+1}$ $\qquad 4C_2(\beta+1)(\beta+2) + 6C_2(\beta+2) + C_1 = 0$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

ضرایب $x^{\beta+r}$ $\quad 4\, C_{r+1}(\beta+r+1)(\beta+r) + 6\, C_{r+1}(\beta+r+1) + C_r =$

$$r=-1 \rightarrow \beta = ? \qquad C_{r+1}(\beta+1+r)\left[4\beta+4r+6\right]=0$$

$$\beta(4\beta+2)=0 \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

الف) $\beta = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$6C_1 + C_0 = 0 \qquad C_1 = \frac{-C_0}{6}$$

$$C_2 = -\frac{C_1}{20} \qquad C_2 = -\frac{C_0}{6\times 20}$$

$$8C_2 + 12C_2 + C_1 = 0$$

$$4r(r+1)C_{r+1} + 6(r+1)C_{r+1} + C_r = 0$$

$$\frac{C_{r+1}}{C_r} = \frac{-1}{(2r+2)(2r+3)}$$

$$\frac{C_{r-1}}{C_{r-2}} = \frac{-1}{(2r-2)(2r-1)} \qquad \frac{C_1}{C_0} = \frac{-1}{(2)(3)}$$

$$\frac{C_{r-1}}{C_{r-2}} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}$$

Subject:
Year, Month, Date

$$y = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K C_0 x^K}{(2K+1)!} = C_0\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{C_0}{\sqrt{x}}\left(x^{-1/2} - \frac{x^{1/2}}{3!} + \frac{x^{3/2}}{5!} + \cdots\right)$$

$$y = \frac{C_0 \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

ب) $\beta = -1/2$

$$-C_1 + 3C_1 + C_0 = 0$$

$$C_{r+1}(2r+1)(2r-1) + 3C_{r+1}(2r+1) + C_r = 0$$

$$\frac{C_{r+1}}{C_r} = \frac{-1}{(2r+1)(2r+2)} \qquad \frac{C_1}{C_0} = \frac{-1}{(1)(2)} = \frac{-1}{2!}$$

$$C_r = \frac{(-1)^r}{(2r)!}$$

$$y = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K C_0}{(2K)!} x^{K-1/2}$$

$$y = \frac{C_0}{\sqrt{x}}\underbrace{\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots\right)}_{\cos\sqrt{x}} = \frac{C_0}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$$

Subject
Year Month Date

$$\boxed{y=\frac{c_0(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

مثال: $xy''+2y'\cancel{y}=0$ $\quad xy''-2y'-yx=0$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta}$$

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta-1} \qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta)(k+\beta-1)x^{k+\beta-1}+\sum_{k=0}^{\infty} 2c_k(k+\beta)x^{k+\beta-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta+1}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+\beta+1)(k+\beta)c_{k+1}+2(k+\beta+1)c_{k+1}-c_{k-1}\Big]x^{k+\beta}=0$$

$$(k+\beta+1)(k+\beta)c_{k+1}+2(k+\beta+1)c_{k+1}-c_{k-1}=0$$

$$\boxed{k=-1}$$

$$(k+\beta+1)(k+\beta+2)c_{k+1}-c_{k-1}=0 \qquad \beta(\beta-1)c_0=0$$

$$\beta=0$$

$$\beta=-1$$

Subject
Year. Month. Date.

الف) $\beta = -1$

$$K(K+1)C_{K+1} - C_{K-1} = 0 \qquad C_{K+1} = \frac{C_{K-1}}{K(K+1)}$$

$$K = 1, 2, 3, \ldots$$

$$C_2 = \frac{C_0}{1\times 2} = \frac{C_0}{2!}$$

$$C_3 = \frac{C_1}{2\times 3} = \frac{C_0}{1\times 2\times 3} \quad , \quad C_4 = \frac{C_2}{3\times 4} = \frac{C_0}{1\times 2\times 3\times 4} = \frac{C_0}{4!}$$

$$y = \sum_{K=0}^{\infty} C_K x^{K+\beta} = \sum_{K=0}^{\infty} C_K x^{K-1} = C_0\left(x^{-1} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \ldots\right)$$

$$+ C_1\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots\right)$$

$$y = \frac{C_0 \cosh x + C_1 \sinh x}{x}$$

ب) $\beta = 0$

$$y = \frac{C_1 \sinh x}{x}$$

$\boxed{H.W}$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای 8

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای شامل یک متغیر وابسته و دو یا چند متغیر مستقل می باشد. برای نمونه مسأله انتقال حرارت در یک لوله با دمای T وابسته به زمان t و طول x می باشد

$$T = f(x,t) \qquad \frac{\delta T}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$$

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\delta T}{\delta t}$$

مرتبه اول $$a(\cdot)\frac{\delta u}{\delta x} + b(\cdot)\frac{\delta u}{\delta y} + c(\cdot)\frac{\delta u}{\delta z} + d(\cdot)\frac{\delta u}{\delta t} + f(\cdot) = g(\cdot)$$

مرتبه دوم $$a(\cdot)\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b(\cdot)\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + c(\cdot)\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + d(\cdot)\frac{\delta u}{\delta x} + e(\cdot)\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) + f(\cdot)u = g(\cdot)$$

مرتبه یک معادله با مشتقات جزئی بالاترین درجه مشتق جزئی ظاهر شده در معادله می باشد.

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \frac{\delta u}{\delta t} = 0$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت خطی یا غیر خطی می تواند همگن یا غیر همگن باشند.

اگر ضرائب ثابت یا مستقل است متغیر وابسته به صورت $(\cdot) \equiv (x,y,z,t)$

معادله خطی است و اگر و یا از رتبه مشتق کمتر باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ولی اگر ضرائب تابعی از مشتق هم‌مرتبه باشد معادلات غیرخطی بوند.

شبه‌خطی $(\cdot) \equiv (x, y, u, \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y})$

غیرخطی $(\cdot) = (x, y, u, \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}, \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y})$

1) ثابت $\alpha \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{\delta T}{\delta t}$ خطی .

2) $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + u \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$ شبه‌خطی یا $+ \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right)$ شبه‌خطی

$\left(\frac{\delta^3 u}{\delta x^3}\right)^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0$ غیرخطی

$\downarrow$

$\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$

$b^2 - 4ac < 0$ بیضوی

$b^2 - 4ac = 0$ سهموی

$b^2 - 4ac > 0$ هذلولی

مثال: $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ $b^2 - 4ac = -4 < 0$ بیضوی

مثال: $\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

$b^2 - 4ac = 0$ سهموی

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

مثال: $c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$ هذلولی

$a = c^2$

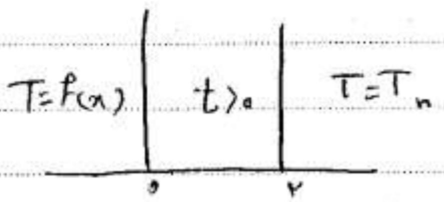
$b = 0$

$c = -1$

انواع شرایط مرزی:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$$

$T(x,t) = ?$



$T(1, 10\,min) = 280\,^\circ C$

۱) نوع اول: مقادیر متغیر وابسته در نقاط مشخصی از متغیر مستقل معلوم باشد.

شرایط اولیه:

$T = T_0$

$t = 0 \rightarrow 0 \le x \le 2$

$T = f(x)$

$t = 0 \rightarrow 0 < x < 2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرایط مرزی ثابت:

$$\text{شرایط مرزی}\begin{cases} T(0,t)=f(t) \\ T(x,t)=T_n \end{cases}$$

۲) نوع دوم: مقدار مشتق متغیر وابسته مقدار ثابت و یا تابعی از متغیر وابسته است.

مثال: $\frac{\partial T}{\partial r}=f(r)$, $\frac{\partial T}{\partial r}=0 \Rightarrow t>0 \rightarrow x=x_i$

۳) نوع سوم: مشتق متغیر وابسته بصورت تابعی از متغیر غیر مستقل باشد.

$$K\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=\left[h\left(T(x,t)-T_\infty\right)\right]$$

شرایط مرزی: ۱) همگن ۲) غیر همگن

توضیح ۱) به آن دسته از شرایط مرزی گفته می شود که در آن تمام جملات بر حسب تابع و یا مشتقات آن باشد.

توضیح ۲) در صورتیکه در شرط مرزی جمله و یا جملاتی غیر از تابع و مشتقات آن وجود داشته باشد شرط مرزی غیر همگن گفته می شود.

$$\begin{cases} C(r,0)=0 & \text{همگن} \\ C(r,0)=C_0 & \text{غیر همگن} \end{cases}$$

مثال: $-K\frac{dT(0,z,t)}{dr}=0$ همگن است.

Subject
Year Month Date

مثال : $-k \dfrac{dT(0,z,t)}{dr} = q$ غیر همگن است

$-k \dfrac{dT}{dr}(0,z,t) = 100$ غیر همگن است

روش های حل معادلات دیفرانسیل پاره ای:

الف) روش جداسازی:

هنگامیکه روش حل به کمک روش جداسازی با شد یا متغییر وابسته مثل u بوسیله یک معادله دیفرانسیل غیرمعمولی به دو متغییر مستقل به x و t مربوط شده باشد جواب را بصورت حاصلضرب دو تابع مستقل بصورت زیر تعریف می کردد:

$$\underbrace{u(x,t) = f(x) \cdot g(t)}$$ $\Rightarrow$ معادله A

روش کار این است که معادله A در معادله دیفرانسیل جاگذاری می کنیم و معادله دیفرانسیلی که برحسب x و t هستند جداسازی می نماییم و معادله را بصورت تساوی بین تابعی از x و t در می آوریم، هر یک از این توابع برابر با مقدار ثابت خواهد بود. هر یک از این توابع را بدست آورده و سپس در آن معادله قرار می دهیم.

مثال: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2 \dfrac{\partial u}{\partial x}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نباید صفر شود

$\to u(x,0)=Ve^{-3x}$, $u(x,t)=f(x)\cdot g(t)$

$\to \frac{\partial u}{\partial t}=f(x)\frac{dg}{dt}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dx}\cdot g(t)$

$\to f(x)\frac{dg}{dt}=2\frac{df}{dx}\cdot g(t)$

$\to \frac{1}{2g(t)}\cdot\frac{dg}{dt}=\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=-\lambda^2$

$\to \frac{1}{2g}\cdot\frac{dg}{dt}=-\lambda^2 \to g(t)=c_1e^{-2\lambda^2 t}$

چونکه در شرایط اولیه (x,0) است پس باید x را صفر بگذاریم.

$\to \frac{1}{f}\frac{df}{dt}=-\lambda^2 \to f(x)=c_2e^{-\lambda^2 x}=Ve^{-3x}$

$C_2=V$, $\lambda^2=3$

$c_1\cdot c_2\cdot e^0$ ثابت c

$\to u(x,0)=Ce^{-\lambda^2 x}=Ve^{-3x} \to C=V$, $\lambda^2=3$

$\to u(x,t)=c_1e^{-2(3)t}\cdot c_2e^{-3x}=Ce^{-2(3)t}\cdot e^{-3x}=Ve^{-3(2t+x)}$

$T_{R,t}=0$, $T_{L,t}=0$, می‌دهد $T_E(x,0)=f(x)$

مثال: میله ای باریک و بلند به طول L در دمای اولیه $f(x)$ قرار دارد. در زمان $t>0$ دو انتهای آن به دمای صفر رسیده است. توزیع دما را در طول میله برحسب زمان بدست آورید.

$\to \frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \to \begin{cases} T(0,t)=0 \\ T(L,t)=0 \end{cases}$

$\to T(x,0)=f(x)$, $T(x,t)=\phi(x)\cdot g(t)$

Subject:
Year: Month: Date:

$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \phi(x)\frac{dg}{dt}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = g(t)\frac{d^2\phi}{dx^2}$

$\rightarrow \phi(x) \cdot \frac{dg}{dt} = \alpha g(t) \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2}$

$\rightarrow \frac{1}{\alpha g} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} = \gamma$

$\rightarrow T(0,t) = 0 = \phi(0) \cdot g(t) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0$

$\rightarrow T(L,t) = 0 = \phi(L) \cdot g(t) = 0 \rightarrow \phi(L) = 0$

$if,\ \gamma = 1 \rightarrow \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \rightarrow \phi(x) = C_1 + C_2 x$

پس بازای $\gamma = 1$

$\phi(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightsquigarrow$ قابل قبول نیست

$if\ \gamma = 0 \rightarrow C_2(L) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$\rightarrow \phi(x) = 0 + 0 = 0$ پس بازای $\gamma = 0$

$\rightarrow T(L,T) = 0 \cdot g(t) = 0 \rightsquigarrow$ قابل قبول نیست

$if,\ \gamma > 0 \rightarrow \frac{1}{\alpha g} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda^2$

$\rightarrow \frac{dg}{dt} - \alpha g \lambda^2 = 0 \rightarrow g(t) = C_3 e^{\alpha\lambda^2 t}$

$\rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi\lambda^2 = 0 \rightarrow \phi(x) = C_4 \sinh\lambda x + C_5 \cosh\lambda x$

$\rightarrow if\ \phi(0) = 0 \rightarrow C_5 = 0$

Subject:
Year Month Date

کاربرد ریاضی در مهندسی شیمی

if $\phi(L)=0 \to C_4 \underbrace{\sinh\lambda L}_{\text{صفر نیست}} = 0 \to C_4 = 0$

$\to \phi(x)=0 \to T(L,T)=0 \Rightarrow$ پس به ازای λ^2 نیز جواب قابل قبول نیست

$$\frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\to \frac{dg}{dt} + \alpha g \lambda^2 = 0 \to g(t) = C_6 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\to \frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi\lambda^2 = 0 \to \phi(x) = C_7 \cos\lambda x + C_8 \sin\lambda x$$

$$\phi(0) = 0 \to C_7 = 0$$

$$\to \phi(L) = 0 \to C_8 \sin\lambda L = 0 \to \sin\lambda L = 0 \to \lambda_n L = n\pi$$

$$\to \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\to \phi(x) = C_8 \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\to T(x,t) = C_6 . C_8 e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} . \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$$\to T(x,t) = C e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} . \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$\to T(x,0) = f(x) \to$ هرجا باشد معلوم ندارم

Subject:
Year. Month Date / /

$f(x) = \sum c \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$

$\rightarrow c = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx$

$\rightarrow$ فرض: $\begin{cases} f(x)=100 \\ , \\ L=1 \end{cases} \rightarrow C = \frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi) \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{400}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$

$\longrightarrow T(x,t) = \frac{400}{\pi} e^{-\alpha(\pi^2)t} \cdot \sin \pi x + \frac{400}{3\pi} e^{-9\alpha\pi^2 t} \sin 3\pi x \ldots$

$\longrightarrow T(x,t) = \frac{400}{\pi} e^{-\alpha\pi^2 t} \cdot \sin\pi x \rightarrow$ if. $t\rightarrow\infty$: $T(x,t)=0$

مثال: توزیع دمای مسئلهٔ قبل را برای حالتیکه دو طرف عایق باشد بدست آورید.

$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=0$ و $\frac{\partial T}{\partial x}(L,t)=0$

$\rightarrow \frac{1}{\alpha g}\frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda^2$

$\frac{1}{\alpha g}\cdot\frac{dg}{dt} = -\lambda^2$, $\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda^2$

$\longrightarrow g(t) = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$, $\frac{d\phi(0)}{dx}=0$, $\frac{d\phi(L)}{dx}=0$

$\longrightarrow \phi(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$$\rightarrow \frac{d\phi(0)}{dx} = -C_1 \lambda \sin\lambda x + C_2 \lambda \cos\lambda x$$

$$\rightarrow \frac{d\phi(L)}{dx} = 0 \rightarrow -C_1 \lambda \sin\lambda x = 0 \rightarrow \sin\lambda L = 0 \rightarrow \lambda_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\rightarrow \phi(x) = C_n \cos\frac{n\pi}{L} x \rightarrow n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\rightarrow T(x,t) = C e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x$$

$$\rightarrow C = C_n \cdot C_1 \quad , \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos\frac{n\pi}{L} \cdot x$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \cos\frac{n\pi}{L} x \cdot dx$$

با قرار دادن مقدار مشخص برای L و تابع معین برای $f(x)$، C_n بدست می‌آید و از آنجا $T(x,t)$ محاسبه می‌شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرایط مرزی	مقادیر ویژه λ	توابع ویژه $\phi(x)$
$\begin{cases}\phi(0)=0\\ \phi(l)=0\end{cases}$	$\frac{n\pi}{l}$	$\sin\frac{n\pi}{l}x$
$\begin{cases}\frac{d\phi(0)}{dx}=0\\ \frac{d\phi(l)}{dx}=0\end{cases}$	$\frac{n\pi}{l}$	$\cos\frac{n\pi}{l}x$
$\begin{cases}\phi(0)=0\\ \frac{d\phi(l)}{dx}=0\end{cases}$	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}$	$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$
$\begin{cases}\frac{d\phi(0)}{dx}=0\\ \phi(l)=0\end{cases}$	$\frac{(2n+1)\pi}{2l}$	$\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

۷- مثال: معادله انتشار موج یک بعدی زیر را با توجه به شرایط مرزی داده شده حل کنید.

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}=C\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \qquad u(x,t)=?$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(l,t)=0 \qquad u(x,0)=f(x)$$

PAPCO

Subject
Year Month Date

$$\frac{\delta u(x,0)}{\delta t} = g(x)$$

$$u(x,t) = X(x)\cdot \tau(t)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = X(x)\cdot \frac{d^2\tau}{dt^2} \qquad \frac{d^2\tau}{dt^2} = \tau''$$

$$c\,\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = c\,\frac{d^2 x}{dx^2}\cdot \tau(t) \qquad \frac{d^2 x}{dx^2} = X''$$

$$\frac{\tau''}{c^2\tau} = -\lambda^2 \qquad \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \tau'' + \lambda^2 c^2 \tau = 0 & (1) \\ X'' + \lambda^2 X = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\tau = A_1 \cos c\lambda t + B_1 \sin c\lambda t$

(2) $X = A_2 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x$

$X(0) = 0 \qquad A_2 = 0$

$X(l) = 0 \qquad \sin \lambda l = 0 = \sin n\pi$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{l}}$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

نکته: اگر جواب $\phi(x)$ بصورت sin شود، n از ۱ به بالا می‌شود،

اگر جواب $\phi(x)$ بصورت cos شود، n از ۰ به بالا می‌شود.

$$X(n) = B_2 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\tau_n(t) = A_1 \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_1 \sin \frac{n\pi c}{l} t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t\right)}_{\tau} \overbrace{\left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right)}^{X}$$

$$a_n = A_1 \cdot B_2$$

$$b_n = B_1 \cdot B_2$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\delta u(x,0)}{\delta t} = g(x) \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi l} \int_0^l g(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{aligned}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

$f(x)=10$ $\quad a_n=2\int_0^1 10\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=-2\times10\times\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$

$L=1$

$$\longrightarrow a_n=\frac{-20}{n\pi}\cos n\pi x$$

$g(x)=x$

$$b_n=\frac{2}{n\pi L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$x=u \qquad \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=dV$

$dx=du \qquad V=-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$

$$b_n=\frac{2}{n\pi C}\left(-\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x-\int_0^L-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi C}\left[-\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x+\left(\frac{C}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{L}x\right]$$

$$b_n=\frac{-2x}{(n\pi)^2C}\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{2L^2}{(n\pi)^3C}\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^{L=1}$$

$$b_n=\frac{-2}{(n\pi)^2C}\cos n\pi+\frac{2}{(n\pi)^3C}\sin n\pi \longleftarrow n\notin Z$$

۵۳/ ۲۳

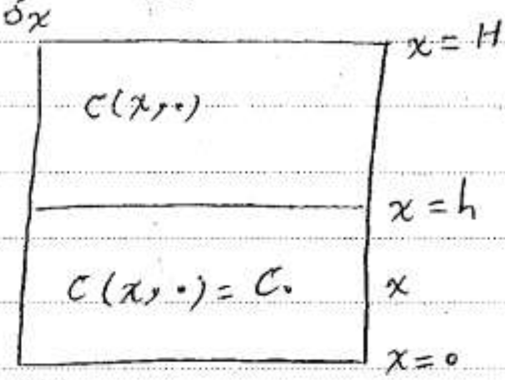
Subject:
Year. Month. Date.

$$u(x,t)=\sum_{x=1}^{\infty}\Big[\underbrace{\frac{-20}{n\pi}\cos n\pi x}_{a_n}\cdot \cos\frac{n\pi c}{l}t+\underbrace{\Big(\frac{-2}{(n\pi)^2c}\cosh\pi+\frac{2}{(n\pi)^3}\sin}_{b_n}$$

$$\underbrace{\cdot \sin\frac{n\pi x}{t}}_{x}\Big]$$

مثال: دو لایه از مایع غیر قابل امتزاج در مجاورت یکدیگر قرار دارد. لایه زیرین به ضخامت h دارای اسپورداری غلظت c_0 از یک نمک است لایه روی به ضخامت $H-h$ فقط حلال خالص است. توزیع غلظت برحسب x و t بدست آورید.

$$\frac{\delta c(H,t)}{\delta x}=0$$



$$\frac{D\,\delta^2 c}{\delta x^2}=\frac{\delta c}{\delta t}$$

$$c(x,t)=?$$

$$c(x,0)=\begin{cases}0 & h<x<H\\ c_0 & x<h\end{cases}$$

$$\frac{\delta(0,t)}{\delta x}=0$$

$$c(x,t)=X(x)\cdot\tau(t)$$

$$\frac{D^2\,\delta^2 c}{\delta x^2}=D\tau\frac{d^2x}{dx^2}\qquad \frac{d^2x}{dx^2}=X''$$

$$\frac{\delta c}{\delta t}=X\cdot\frac{d\tau}{dt}\qquad \frac{d\tau}{dt}=\tau'$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 & X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \\ T' + \lambda^2 D T = 0 & T = Ce^{-D\lambda^2 t} \end{cases}$$

$$\frac{\delta(0,t)}{\delta x} = 0$$

$$-A\sin\lambda x + B\sin\lambda x = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\frac{\delta(H,t)}{\delta x} = 0 \qquad -A\sin\lambda H = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{H} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$c(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D\lambda_n^2 t} \cos\frac{n\pi}{H}x$$

$$\int_0^h C_0 \cos\frac{n\pi}{H}x\,dx + \int_h^H (0)\cos\frac{n\pi}{H}x\,dx = a_n\int^H \cos^2\frac{n\pi}{H}x\,dx$$

$$C_0\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{H}x = \left[\frac{H}{2} + \frac{H}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi}{H}x\Big|_0^H\right]a_n$$

$$C_0\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{H}h = \left[\frac{H}{2} + \frac{H}{4n\pi}\left(\sin\cancel{\frac{2n\pi}{H}}(0) - \sin\cancel{\frac{2n\pi}{H}H}\right)\right]a_n$$

$$C_0\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{H}h = \left[\frac{H}{2}\right]a_n$$

$$a_n = \frac{\frac{C_0 H}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{H}h}{H/2}$$

Subject:
Year: Month: Date:

$$a_0 = \frac{\frac{C_0 H}{n\pi} \cdot \frac{n\pi}{H} \cdot h}{H/2} = \frac{2hC_0}{H}$$

$$a_n = \frac{2C_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{H} h$$

$$\frac{C(x,t)}{C_0} = \frac{h}{H} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi h}{nH} \cdot e^{-D\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2} \cdot \cos \frac{n\pi x}{H}$$