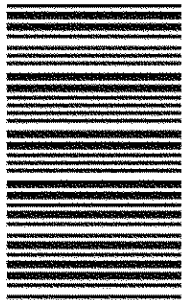


کد کنترل

F

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۱۴۰۱/۱۲/۱۲

«اگر دانشگاه اصلاح شود
مملکت اصلاح می شود.»
امام خمینی (ره)

ریاضی (کد ۸۰۱۲)

زمان پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۲۶	۶۵
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۶۶	۸۵
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبیات	۲۰	۸۶	۱۰۵
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۰۶	۱۲۵
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی	۲۰	۱۲۶	۱۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با منتهلین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سوالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سوالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- Despite the fact that Gross Domestic Product (GDP) has increased substantially in the industrialized West, the levels of human contentment have remained -----.
1) apposite 2) interwoven 3) static 4) implicit
- 2- Immigration ----- from the Latin word migration and means the act of a foreigner entering a country in the aim of obtaining the right of permanent residence.
1) gathers 2) obtains 3) arises 4) derives
- 3- Not speaking the same language as your customers can lead to communication -----.
1) breakdown 2) brevity 3) gesture 4) imitation
- 4- The factory's workforce has ----- from over 4,000 to a few hundred.
1) withdrawn 2) dwindled 3) undercut 4) forecasted
- 5- The police came up empty-handed despite an ----- exploration of the suspect's home.
1) exhaustive 2) inescapable 3) ephemeral 4) inevitable
- 6- When the old man married a woman in her thirties, all everyone talked about was the ----- in the couple's ages.
1) diversity 2) disparity 3) longevity 4) extension
- 7- One local factory will ----- the town's job shortage by providing 250 more jobs.
1) overlook 2) adjust 3) displace 4) alleviate

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

One commentator argues that the success of private schools is not in their money, (8) ----- their organization. State schools fail their pupils because, under government control, they lack options. But if head teachers at state schools (9) ----- given the same freedom as those at private schools, namely (10) ----- poor teachers and pay more to good ones, parents would not need to send their children to private schools any more.

- | | | | | |
|-----|---------------|-------------|-----------|------------|
| 8- | 1) that is | 2) it is in | 3) but in | 4) is |
| 9- | 1) had | 2) were | 3) to be | 4) be |
| 10- | 1) by sacking | 2) sacking | 3) sacked | 4) to sack |

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Much of the classical theory of optimization, motivated primarily by problems of physics, is associated with great mathematicians: Gauss, Lagrange, Euler, the Bernoullis, etc. During the recent development of optimization in decision problems, the classical techniques have been reexamined, extended, sometimes rediscovered, and applied to problems having quite different origins than those responsible for their earlier development. New insights have been obtained and new techniques have been discovered. The computer has rendered many techniques obsolete while making other previously impractical methods feasible and efficient. These recent developments in optimization have been made by mathematicians, system engineers, economists, operations researchers, statisticians, numerical analysts, and others in a host of different fields.

The study of optimization as an independent topic must, of course, be regarded as a branch of applied mathematics. As such it must look to various areas of pure mathematics for its unification, clarification, and general foundation. One such area of particular relevance is functional analysis.

Functional analysis is the study of vector spaces resulting from a merging of geometry, linear algebra, and analysis. It serves as a basis for aspects of several important branches of applied mathematics including Fourier series, integral and differential equations, numerical analysis, and any field where linearity plays a key role. Its appeal as a unifying discipline stems primarily from its geometric character. Most of the principal results in functional analysis are expressed as abstractions of intuitive geometric properties of ordinary three-dimensional space.

Some readers may look with great expectation toward functional analysis, hoping to discover new powerful techniques that will enable them to solve important problems beyond the reach of simpler mathematical analysis. Such hopes are rarely realized in practice. The primary utility of functional analysis for the purposes of this book is its role as a unifying discipline, gathering a number of apparently diverse, specialized mathematical tricks into one or a few general geometric principles.

11- According to the passage, which sentence is correct?

- 1) Numerical analysis is the study of analytic problems.
- 2) Functional analysis is extensively different from analysis.
- 3) Geometry plays a major role in the development of functional analysis.
- 4) Functional analysis is the study of analytic problems.

- 12- Functional analysis is fundamentally useful in -----.
- 1) areas of mathematics in which linearity plays a significant role
 - 2) intuitive development of numerical algorithms
 - 3) the development of abstract notions of mathematics
 - 4) the study of three-dimensional objects
- 13- What does the underlined word "utility" in the last paragraph mean?
- 1) convention
 - 2) token
 - 3) engagement
 - 4) usefulness
- 14- According to the passage, which statement is correct?
- 1) Optimization is primarily a theoretical area.
 - 2) Functional analysis and optimization are diverse areas in mathematics.
 - 3) Functional analysis is a relevant area to optimization.
 - 4) Pure mathematics has no role in foundation of optimization.
- 15- Decision problems -----.
- 1) have been solely motivated by physics
 - 2) are mainly studies by classical techniques
 - 3) have been influenced by obsolete techniques
 - 4) have benefited from the advent of new developments in optimization

PASSAGE 2:

Gaussian elimination, QR factorization, and most other algorithms of dense linear algebra fit the following pattern: there are $O(m)$ steps, each requiring $O(m^2)$ work, for a total work estimate of $O(m^3)$. (Of course these figures, especially the second, may change on a parallel computer.) For iterative methods, the same figures still apply, but now they represent a typical worst-case behavior. When these methods succeed, they may do so by reducing one or both of these factors.

We shall see that the number of steps required for convergence to a satisfactory precision typically depends on spectral properties of the matrix A , if the word "spectral" is interpreted broadly. For example, the conjugate gradient iteration is guaranteed to solve a hermitian positive definite system $Ax = b$ quickly if the eigenvalues of A are clustered well away from the origin. Similarly, the Lanczos iteration is guaranteed to compute certain eigenvalues of a real hermitian matrix quickly if those eigenvalues are well separated from the rest of the spectrum (and if the initial vector that starts the iteration is suitably generic). The analysis of the convergence rates of these methods is a fascinating study that depends on the mathematical field of approximation theory. Specifically, the convergence of Krylov subspace iterative algorithms is closely related to problems of approximation of functions $f(z)$ by polynomials $p(z)$ on subsets of the real axis or the complex plane.

The work per step in a matrix iteration depends mainly on the structure of the matrix and on what advantage is taken of this structure in the $x \rightarrow Ax$ black box.

The ideal iterative method in linear algebra reduces the number of steps from m to $O(1)$ and the work per step from $O(m^2)$ to $O(m)$, reducing the total work from $O(m^3)$ to $O(m)$. Such extraordinary speedups do occur in practical problems, but a more typical improvement is perhaps from $O(m^3)$ to $O(m^2)$. In a practical large-scale engineering

computation of the mid-1990s, where iterative algorithms are successful, perhaps a typical result is that they beat direct algorithms by a factor on the order of 10. As machines get faster and m gets larger in the future, this factor will increase and iterative algorithms will become more important, illustrating the fundamental law of computer science: the faster the computer, the greater the importance of speed of algorithms.

- 16- Successful iterative methods are expected to have a total work estimate -----.**
- 1) of $O(1)$
 - 2) of $O(m^3)$
 - 3) of $O(m)$
 - 4) lower than $O(m^3)$
- 17- The conjugate gradient iterative method for solving certain linear systems -----.**
- 1) is fast if the eigenvalues of the coefficient matrix spread away from the origin
 - 2) is not considered to be an efficient approach
 - 3) converges quickly whenever the eigenvalues are clustered around a nonzero point
 - 4) is not competitive
- 18- What does the underlined word “spectrum” in paragraph 2 mean?**
- 1) tolerance
 - 2) extent
 - 3) deviation
 - 4) accordance
- 19- Approximation theory -----.**
- 1) is mainly concerned with approximation of nonlinear functions on the complex plane
 - 2) provides tools for investigation of convergence rate of Lanczos iteration
 - 3) has no tool for convergence of the Krylov algorithm
 - 4) is mainly concerned with approximation of polynomials
- 20- As computers get to be faster, -----**
- 1) the speed of algorithms is immaterial
 - 2) iterative algorithms turn to be irrelevant
 - 3) the speed of algorithms gets to be of more concern
 - 4) iterative algorithms are expected to be less significant

PASSAGE 3:

All methods allow a change of the step length in each integration step; an adjustment of the respective stepsizes in each of them does not run into any inherent difficulties. The modern multistep methods are not employed with fixed orders; nor are the extrapolation methods. In extrapolation methods, for example, one can easily increase the order by appending another column to the tableau of extrapolated values. One-step methods of the Runge-Kutta-Fehlberg type, by construction, are tied to a fixed order, although methods of variable orders can also be constructed with correspondingly more complicated procedures. Research on this is currently in progress.

In an attempt to find out the advantages and disadvantages of the various integration schemes, computer programs for the methods mentioned above have been prepared with the utmost care, and extensive numerical experiments have been conducted with a large number of differential equations. The result may be described roughly as follows:

The least amount of computation, measured in evaluations of the right-hand side of the differential equation, is required by the multistep methods. In a predictor method the right-hand side of the differential equation must be evaluated only *once* per step, while in a corrector method this number is equal to the (generally small) number of

iterations. The expense caused by the step control in multistep methods, however, destroys this advantage to a large extent. Multistep methods have the largest amount of overhead time. Advantages accrue particularly in cases where the right-hand side of the differential equation is built in a very complicated manner (large amount of computational work to evaluate the right-hand side). In contrast, extrapolation methods have the least amount of overhead time, but on the other hand sometimes do not react as "sensitively" as one-step methods or multistep methods to changes in the prescribed accuracy tolerance ε : often results are furnished with more correct digits than necessary. The reliability of extrapolation methods is quite high, but for modest accuracy requirements they no longer work economically (are too expensive).

For modest accuracy requirements, Runge-Kutta-Fehlberg methods with low orders of approximation p are to preferred. Runge-Kutta-Fehlberg methods of certain orders sometimes react less sensitively to discontinuities in the right-hand side of the differential equation than multi-step or extrapolation methods. It is true that in the absence of special precautions, the accuracy at a discontinuity in Runge-Kutta-Fehlberg methods is drastically reduced at first, but afterward these methods continue to function without disturbances. In certain practical problems, this can be an advantage.

- 21- When the right-hand side of a differential equation is costly to compute, -----.
- 1) multistep methods are preferred
 - 2) a one-step method is preferred
 - 3) an extrapolation method is preferred
 - 4) accuracy of an obtained solution may not be reliable
- 22- For discontinuous differential equations -----.
- 1) multistep methods are stable
 - 2) a one-step method can be advantageous
 - 3) an extrapolation method is the most efficient approach
 - 4) a one-step method turns to produce unreliable solutions
- 23- What does the underlined word "appending" in paragraph 1 mean?
- 1) perturbing
 - 2) forwarding
 - 3) trailing
 - 4) attaching
- 24- In a multistep method, prediction -----.
- 1) demands extraordinary care
 - 2) needs less computing than correction
 - 3) needs more computing than correction
 - 4) requires the same amount of computing as correction
- 25- An approach requiring a low overhead time, being less sensitive at times to accuracy tolerance changes, and having reliability at the expense of being costly -----.
- 1) is an extrapolation method
 - 2) is a one-step method
 - 3) is a multistep method
 - 4) does not exist

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ ، در صورت وجود کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۴) حد وجود ندارد.

۲۷- تعداد ریشه های حقیقی معادله $x^{201} - x + 7 = 0$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) حداقل ۴

۲۸- کدام مورد برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ درست است؟

(۱) همگرا به $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

(۲) همگرا به ۱ است.

(۳) همگرا به $\sqrt{2}$ است.

(۴) واگراست.

۲۹- کدام مورد برای مقادیر سری های $I = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$ و $J = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$ درست است؟

(۱) I و J موجود و متناهی اند.

(۲) J موجود و متناهی و I بی نهایت است.

(۳) I موجود و متناهی و J بی نهایت است.

(۴) I و J بی نهایت هستند.

۳۰- مقدار متوسط تابع $f(x, y) = x$ بر قطعه ای از قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ که در سمت راست خط $x = 1$ قرار دارد، کدام است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$

(۲) $\frac{6\sqrt{3}}{2\pi - \sqrt{3}}$

(۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{6\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}$

۳۱- فرض کنید D ناحیه محصور به منحنی‌های $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ بوده و داشته

باشیم: $I = \iint_D f(xy) dx dy = A \int_1^2 f(u) du$. مقدار A کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4} \ln 2$

(۲) $\frac{1}{2} \ln 2$

(۳) $\ln 2$

(۴) $2 \ln 2$

۳۲- جرم کل چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=1$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا و تابع چگالی

$\rho(x, y, z) = \frac{16}{(1+x+y+z)^4}$ کدام است؟

(۱) $4 \ln 2 - 5$

(۲) $8 \ln 2 - 5$

(۳) $4 \ln 2 + 5$

(۴) $8 \ln 2 + 5$

۳۳- فرض کنید $z = z(x, y)$, $u = e^y \cos x + xe^z$ و $x^2 z + y \ln x = x \cos y$. مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)$ کدام است؟

(۱) $-\sin(1)$

(۲) صفر

(۳) $\sin(1)$

(۴) $2e$

۳۴- فرض کنید C منحنی قطبی $r = 2\sqrt{\cos \theta}$ به ازای $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ واقع در صفحه مختصات xy باشد. مقدار

$\int_C 2x dx + dz$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳۵- فرض کنید S آن قسمت از رویه استوانه‌ای $y = e^x$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yz

به صورت $R = \{1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ است. شار میدان $\vec{F} = 2x \vec{i} - 3xy \vec{j} + \ln z \vec{k}$ بر S کدام است؟

(۱) $5 - 10 \ln 2$

(۲) $3 - 2 \ln 2$

(۳) $10 \ln 2 - 5$

(۴) $10 \ln 2 - \frac{15}{4}$

۳۶- معادله دیفرانسیل $x^2 y''(x) + p(x) y'(x) + x^4 y(x) = 0$; $x > 0$ را در نظر بگیرید. با استفاده از تغییر متغیر $z = f(x)$ معادله را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم. $p(x)$ کدام است؟ (فرض کنید $f'(x) > 0$)

(۱) $2x^3 - x$

(۲) $-x^3 - x^2$

(۳) $-x^2 + 2x$

(۴) $x^2 + x$

۳۷- معادله دیفرانسیل $x^3 y^{(3)} - x^2 y^{(2)} + 2xy' - 2y = 0$; $x > 0$ با شرایط نامتعارف $y(1) = y'(1) = y''(1)$ و $y''(\frac{1}{3}) = -1$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی جواب $y(x)$ در $x = e$ ، کدام است؟

(۱) $e - 1$

(۲) $e + 1$

(۳) $2(e - 1)$

(۴) $2(e + 1)$

۳۸- معادله $ty'' - ty' + y = 1$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 3$ را در نظر بگیرید. اگر $Y(s) = L\{y(t)\}$ ، آنگاه مقدار $Y(2)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{7}{4}$

(۲) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{1}{4}$

۳۹- اگر $L(J_0(x))$ باشد، آنگاه $L(J_1(x))$ ، کدام است؟ (J نمایش تابع بسل است).

(۱) $\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}$

(۲) $\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$

(۳) $\frac{s-\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}$

(۴) $\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$

۴۰- معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - x(a+x)y' + (\beta + x^2)y = 0$ دارای جوابی به صورت $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ حول

$$x=0 \text{ است، که در آن } y_1(x) = x^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right), y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

مقدار $\alpha + \beta$ ، کدام است؟ c_1 و c_2 ثابت و a_n و b_n دنباله هستند.

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

۴۱- نقیض گزاره زیر، کدام است؟

«به شرط آن که X مجموعه‌ای فشرده باشد، پیوسته یکنواخت بودن $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ، شرط لازم برای پیوسته بودن f است.»

(۱) X مجموعه‌ای فشرده است و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست.

(۲) X مجموعه‌ای فشرده است و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است ولی f پیوسته نیست.

(۳) X مجموعه‌ای فشرده است و اگر $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f پیوسته نیست.

(۴) X مجموعه‌ای فشرده است و اگر $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است.

۴۲- فرض کنید $F: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ یک تابع صعودی باشد، یعنی از $X \subseteq Y \subseteq A$ نتیجه شود $F(X) \subseteq F(Y)$. اگر

$C = \bigcup \{X \subseteq A : X \subseteq F(X)\}$ و $B = \bigcap \{X \subseteq A : F(X) \subseteq X\}$ آنگاه از دو تساوی زیر، کدام برقرار است؟

$$F(C) = C \text{ «ب»} \quad F(B) = B \text{ «الف»}$$

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) نه «الف» و نه «ب»

۴۳- فرض کنید تابع $\phi: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ با ضابطه $\phi(f) = f^*$ تعریف شود که در آن برای هر $x \in \mathbb{R}$ ،

$$f^*(x) = (x^3 - x)f(x)$$

کدام گزینه درباره تابع ϕ ، درست است؟

(۱) یک‌به‌یک و پوشا است.

(۲) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(۳) نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

(۴) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

۴۴- فرض کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های ناتهی مجموعه کلاً مرتب (X, \leq) باشد. اگر

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \text{ و } \alpha = \sup \{ \inf A_i : i \in I \} \text{ و } B = \inf \{ \sup A_i : i \in I \} \text{ در } (X, \leq) \text{ موجود باشند، کدام}$$

گزینه، درست است؟

(۱) اگر مجموعه B تک‌عضوی باشد، آنگاه $\alpha = \beta$.

(۲) همواره $\beta \leq \alpha$ ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

(۳) اگر $\alpha = \beta$ آنگاه B مجموعه‌ای تک‌عضوی است.

(۴) اگر خانواده $\{A_i\}$ یک زنجیر باشد یعنی به ازای هر $i, j \in I$ ، $A_i \subseteq A_j$ یا $A_j \subseteq A_i$ و آنگاه $\alpha = \beta$.

۴۵- فرض کنید $\text{Card } \mathbb{N} = \aleph_0$ و $\text{Card } \mathbb{R} = c$ ، کدام گزینه، نادرست است؟

$$(1) c < 2^{\aleph_0}$$

$$(2) c^{\aleph_0} = c$$

(۳) اگر a یک عدد اصلی باشد آنگاه $a < 2^a$.

(۴) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $c^n = c$ و $\aleph_0^n = \aleph_0$.

۴۶- فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ رتبه و اثر ماتریس‌ها درست است؟
($\text{tr}(A)$ یعنی اثر ماتریس A)

(۱) $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

(۲) $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A) \times \text{rank}(B)$

(۳) $\text{rank}(A^t) = \frac{1}{\text{rank}(A)}$

(۴) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

۴۷- فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ ، $n \geq 4$ ، با درایه‌های $a_{ij} = i + j$ برای $1 \leq i, j \leq n$ باشد. در این صورت رتبه A ، کدام است؟

(۱) n

(۲) $n-1$

(۳) $n-2$

(۴) 1

۴۸- فرض کنید $C^\infty(\mathbb{R})$ فضای برداری تمام توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد که f در هر نقطه از \mathbb{R} از هر مرتبه مشتق پذیر است و تبدیل خطی $T: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(f(x)) = f'(x)$ باشد. در این صورت کدام مورد نادرست است؟
(۱) هر عدد حقیقی $\lambda \in \mathbb{R}$ یک مقدار ویژه T است.

(۲) یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda = 4$ عبارتست از $y(t) = 4e^{4t}$.

(۳) تابع $y(t) = 3e^{2t}$ یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda = 3$ است.

(۴) بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda = 0$ ، تمام توابع ثابت ناصفر هستند.

۴۹- اگر N یک ماتریس 4×4 غیر صفر پوچ توان با درایه‌های حقیقی باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه $I + N$ ، کدام است؟

(۱) $(x-1)^4$

(۲) $1-x^4$

(۳) $(x+1)^4$

(۴) $x^4 - 1$

۵۰- فرض کنید A ، یک ماتریس 2×2 حقیقی است. اگر $\text{tr}(A^2) = 25$ و $\text{tr}(A) = 7$ ، در این صورت حاصل ضرب مقادیر ویژه A ، کدام است؟ ($\text{tr}(A)$ یعنی اثر ماتریس A)

(۱) 6

(۲) 8

(۳) 10

(۴) 12

۵۱- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که برای هر n ،

$$x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$$

کدام مورد، درست است؟

(۱) $\{x_n\}$ همگرا است.

(۲) عدد حقیقی x وجود دارد که برای هر n ، $x_{2n} \leq x \leq x_{2n-1}$.

(۳) دنباله‌های $\{x_{2n}\}$ و $\{x_{2n-1}\}$ همگرا هستند ولی $\lim x_{2n} \neq \lim x_{2n-1}$.

(۴) دنباله‌های $\{x_{2n}\}$ و $\{x_{2n-1}\}$ همگرا هستند و $\limsup x_n = \lim x_{2n}$ و $\liminf x_n = \lim x_{2n-1}$.

۵۲- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f(A)$ در \mathbb{R} ، چگال باشد. کدام مورد، درست است؟

- (۱) اگر f پیوسته باشد، آنگاه پوشا است.
- (۲) اگر f پیوسته باشد، آنگاه یک به یک است.
- (۳) اگر f مشتق پذیر باشد، آنگاه دوسویی است.
- (۴) اگر f پوشا باشد، آنگاه پیوسته است.

۵۳- برای عدد طبیعی $n \geq 2$ ، چند جمله ای $P_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + \frac{x}{1!} + 1$ ، چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) n

(۲) ۲

(۳) $2n$

(۴) صفر

۵۴- کدام مورد، در خصوص تابع $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر، درست است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^x} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$$

(۱) در مبدأ ناپیوسته است.

(۲) بر $(-1, \infty)$ پیوسته است ولی در مبدأ مشتق پذیر نیست.

(۳) بر $(-1, \infty)$ از هر مرتبه ای مشتق پذیر است.

(۴) بر $(-1, \infty)$ مشتق پذیر است ولی مشتق آن در مبدأ پیوسته نیست.

۵۵- فرض کنید $I = [0, 1] \times [0, 1]$ و تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف شود، مقدار عبارت

$$\int_0^1 f(x, y) dx - \int_0^1 f(x, y) dy$$

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 & x \in Q \\ y & x \notin Q \end{cases}$$

(۱) $y(1-y)$

(۲) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

(۳) $y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} y \right)$

(۴) صفر

۵۶- در یک دستگاه ممیز شناور برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۸ با ۳ رقم ماننسیس و روش بریدن (قطع کردن)، فاصله بین عدد ۷ و نزدیک ترین عدد قابل نمایش بزرگ تر از ۷، کدام است؟

(۱) 8^{-3}

(۲) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{49}$

(۴) $\frac{1}{64}$

۵۷- روش چولسکی برای تجزیه مثلثی یک ماتریس معین مثبت بدون محورگزینی پایدار است چون

(۱) تجزیه چولسکی یکتاست

(۲) رشد اعداد میانی ایجاد نمی کند

(۳) ماتریس ناتکین (وارون پذیر) است

(۴) تجزیه چولسکی نسبت به تجزیه LU به محاسبات کمتری نیاز دارد

۵۸- تقریب تابع $\sin x$ در بازه $[0, 2]$ به وسیله تکه های خطی درون باب مدنظر است. این بازه دست کم به چند زیربازه با طول

برابر تقسیم شود تا کران بالای خطای درون یابی برای تخمین $\sin x$ در سرتاسر بازه بیش از $10^{-4} \times 125$ نباشد؟

(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۲۰۰

(۴) ۴۰۰

۵۹- کدام گزینه در مورد جواب مسئله $\min_c \|A^T c - b\|_2$ درست است؟

(۱) می تواند جواب نداشته باشد.

(۲) جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر سطرها ی A مستقل خطی باشند.

(۳) جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر ستون های A مستقل خطی باشند.

(۴) بی نهایت جواب دارد اگر c موجود نباشد به طوری که $A^T c \leq b$.

۶۰- همگرایی مجانبی رابطه تکراری $x_{k+1} = \sin x_k$ به نقطه ثابت است.

(۱) صفر، خطی

(۲) از مرتبه ۲

(۳) از مرتبه ۳

(۴) ناصفر، از مرتبه ۲

۶۱- میانگین نمرات در درس های احتمال ۱ و احتمال ۲ به ترتیب $14/5$ و 14 است. واریانس این دو درس نیز به ترتیب ۹ و ۴

هستند. علی در هر دوی این دروس نمره ۱۶ گرفته است. کدام مورد درست است؟

(۱) علی در درس احتمال ۲ قوی تر عمل کرده است.

(۲) علی در درس احتمال ۱ قوی تر عمل کرده است.

(۳) علی در هر دو درس یکسان عمل کرده است.

(۴) برای قضاوت، به پارامترهای دیگری نیز نیاز است.

۶۲- در بین ۳۳ دانشجوی یک کلاس، ۱۷ نفر در امتحان میان ترم نمره A گرفته اند، تعداد ۱۴ نفر در امتحان پایان ترم نمره A

گرفته اند و ۱۱ نفر در هیچ کدام از این امتحانات نمره A نگرفته اند. چند نفر در هر دو امتحان نمره A گرفته اند؟

(۱) ۳

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۶۳- فرض کنید $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از پیشامدهای دلخواه باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ وجود داشته باشد. کدام یک

از موارد زیر نادرست است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) \quad (۱)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (۲)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{m=1}^n A_m) \quad (۳)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (۴)$$

۶۴- ظرفی شامل ده کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰ است. اگر چهار کارت را به طور تصادفی، یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب کنیم، احتمال آنکه شماره کارت‌ها به صورت صعودی انتخاب شوند، کدام است؟

$$\frac{1}{24} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{24} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{24} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{24} \quad (۴)$$

۶۵- کفشی به طور کاملاً تصادفی از کمدهی محتوی ۵ جفت کفش متفاوت، چهار لنگه کفشی را بدون جایگذاری انتخاب می‌کند. احتمال اینکه هیچ جفت کفشی در این چهار لنگه کفش انتخاب نشده باشد، کدام است؟

$$1 - \left(\frac{2}{10}\right)^5 \quad (۱)$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^5 \quad (۲)$$

$$\frac{8}{21} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{63} \quad (۴)$$

۶۶- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد، $x, y \in X$ و $A \subseteq X$. شرط معادل با اینکه $x \in A^\circ$ و $y \in \bar{A}$ کدام است؟

(۱) $d(y, A) \neq 0$ و $d(x, X \setminus A) = 0$

(۲) $d(y, A) = 0$ و $d(x, X \setminus A) = 0$

(۳) $d(y, A) = 0$ و $d(x, X \setminus A) \neq 0$

(۴) $d(y, A) \neq 0$ و $d(x, X \setminus A) \neq 0$

۶۷- فرض کنید A و B دو مجموعه در یک فضای متریک باشند. کدام گزینه معادل با بسته بودن A و باز بودن B است؟

(۱) $\partial B \cap B = \emptyset$ و $\partial A \subseteq A$

(۲) $\partial B \cap B = \emptyset$ و $\partial A = \partial \bar{A}$

(۳) $\partial B = \emptyset$ و $\partial A \subseteq A$

(۴) $\partial B = \bar{B} \setminus B$ و $A = (\bar{A}^\circ)$

۶۸- فرض کنید A و B دو زیرمجموعه چگال در فضای متریک (X, d) باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) $A \cap B = \emptyset$

(۲) $A \cap B$ در X بسته نیست.

(۳) اگر A باز باشد آنگاه $A \cap B$ در X چگال است.

(۴) اگر $A \cap B$ در X چگال باشد آنگاه B باز است.

۶۹- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک همبند باشد و $x_0 \in X$. اگر به ازای هر $x \in X$ ، $d(x, x_0) \neq 1$ ، کدام گزینه درباره X درست است؟

(۱) فشرده است.

(۲) کران دار است.

(۳) فضای متریک کامل (complete) است.

(۴) مجموعه کامل (perfect) است.

۷۰- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq Y \subseteq X$. کدام گزینه معادل چگال بودن A در Y است؟

(۱) به ازای هر مجموعه بسته مانند F اگر $A \subseteq F$ آنگاه $Y \subseteq F$.

(۲) مجموعه $\{C\}$ بسته است و $\{C \subseteq Y : C \cup A^\circ = X\}$ حداکثر یک عضو دارد.

(۳) مجموعه $\{C\}$ بسته است و $\{C : A \subseteq C \subseteq Y\}$ حداکثر یک عضو دارد.

(۴) مجموعه $\{C \subseteq X : (C \setminus Y)^\circ = \emptyset\}$ و $A \subseteq C$ بسته است و $\{C \subseteq X : (C \setminus Y)^\circ = \emptyset\}$ حداکثر یک عضو دارد.

۷۱- از کدام گزینه کامل بودن (Completeness) فضای متریک X نتیجه نمی شود؟

(۱) هر گوی بسته در X فشرده است.

(۲) هر دنباله کوشی در X زیردنباله همگرا در X دارد.

(۳) هر نقطه x از X دارای همسایگی با بستار فشرده است.

(۴) اگر Y زیرمجموعه چگال در X باشد، هر دنباله کوشی در Y ، در X همگرا است.

۷۲- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X, d) باشد و به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $E_k = \{x_n : n \geq k\}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $\lim x_n = \alpha$ آنگاه $\bigcap E_k = \{\alpha\}$

(۲) اگر $\lim x_n = \alpha$ آنگاه $\bigcap E_k = \{\alpha\}$

(۳) اگر $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(E_k) = 0$ و فضای متریک X کامل باشد آنگاه دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

(۴) اگر $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(E_k) = 0$ و فضای متریک X فشرده باشد آنگاه دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

۷۳- فرض کنید X فضای متریک فشرده و Y یک فضای متریک باشد و تابع $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $A \subseteq X$ بسته باشد آنگاه $f(A) \subseteq Y$ بسته است.

(۲) اگر $A \subseteq X$ باز باشد آنگاه $f(A) \subseteq Y$ باز است.

(۳) اگر $B \subseteq Y$ باز باشد آنگاه $f^{-1}(B) \subseteq X$ باز است.

(۴) اگر $B \subseteq Y$ بسته باشد آنگاه $f^{-1}(B) \subseteq X$ بسته است.

۷۴- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند. از کدام گزینه پیوستگی تابع $f : X \rightarrow Y$ نتیجه نمی‌شود؟

(۱) تحدید f بر هر زیرمجموعه فشرده X پیوسته است.

(۲) تحدید f بر هر زیرمجموعه همبند X پیوسته است.

(۳) تحدید f بر هر گوی باز X پیوسته است.

(۴) تحدید f بر هر گوی بسته X پیوسته است.

۷۵- فرض کنید توابع حقیقی f و g بر فضای متریک X پیوسته یکنواخت باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) fg بر X یکنواخت پیوسته است.

(۲) $f + g$ بر X در شرط لیپشیتس صدق می‌کند.

(۳) اگر برای هر $x \in X$ ، $f(x) \neq 0$ آنگاه $\frac{g}{f}$ بر X یکنواخت پیوسته است.

(۴) برای دنباله $\{A_n\}$ از زیر مجموعه‌های X اگر $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$ آنگاه $\text{diam}(f+g)(A_n) \rightarrow 0$.

۷۶- فرض کنید تابع $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ تعریف شده باشد، که در آن a و b اعداد ثابت ناصفری هستند. اگر $A = f([0, 2\pi))$ آنگاه کدام گزینه در مورد تابع $f : [0, 2\pi) \rightarrow A$ درست است؟

(۱) وارون‌پذیر است ولی f^{-1} پیوسته نیست.

(۲) وارون‌پذیر نیست.

(۳) وارون‌پذیر است و f^{-1} یکنواخت پیوسته است.

(۴) وارون‌پذیر است و f^{-1} پیوسته است ولی یکنواخت پیوسته نیست.

۷۷- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی کراندار بر مجموعه S باشد که بر S به تابع f یکنواخت همگرا است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $f_n^2 \rightarrow f^2$ به‌طور یکنواخت بر S .

(۲) دنباله $\{f_n\}$ بر S یکنواخت کراندار است.

(۳) برای هر تابع پیوسته g بر \mathbb{R} ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{gof}_n = \text{gof}$ به‌طور یکنواخت بر S .

(۴) اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S و همگرا به $x \in S$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

۷۸- فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ با ضابطه زیر تعریف شود:

$$f_0(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \geq 1)$$

کدام گزینه درباره سری توابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ درست است؟

(۱) مطلقاً یکنواخت همگراست.

(۲) یکنواخت همگرای مشروط است.

(۳) همگرای نقطه‌وار نیست.

(۴) همگرای نقطه‌وار هست ولی یکنواخت همگرا نیست.

۷۹- فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 2\pi]$ یکنواخت همگرا به صفر باشد و به ازای هر $x \in [0, 2\pi]$ دنباله $\{f_n(x)\}$

نزولی باشد. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin nx$ درست است؟

(۱) به ازای هر $0 < \delta < \pi$ سری بر بازه $[\delta, 2\pi - \delta]$ یکنواخت همگرا است ولی ممکن است سری بر بازه $[0, 2\pi]$ یکنواخت همگرا نباشد.

(۲) در حالتی که $f_n(x) = \frac{1}{n}$ ، سری بر $[0, 2\pi]$ نقطه‌ای همگراست ولی یکنواخت همگرا نیست.

(۳) سری در هیچ بازه فشرده‌ای از بازه باز $(0, 2\pi)$ یکنواخت همگرا نیست.

(۴) سری در برخی از نقاط بازه $[0, 2\pi]$ همگرا نیست.

۸۰- فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر باشد و $F_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

تعریف شود. اگر دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) دنباله $\{F_n\}$ بر $[0, \infty)$ یکنواخت کراندار است.

(۲) در صورت وجود حدود، $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x)$.

(۳) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، F_n مشتق پذیر است و به ازای هر x ، $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(۴) دنباله $\{F_n\}$ بر هر زیرمجموعه کراندار $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت است ولی بر $[0, \infty)$ لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۸۱- دنباله توابع $\{f_n\}$ ، با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f_n: \left[1, \frac{3}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{\tan^n x}{1 + \tan^n x}$$

کدام گزینه درباره دنباله $\{f_n\}$ درست است؟

(۱) همگرای نقطه‌وار نیست.

(۲) همگرای یکنواخت و هم پیوسته است.

(۳) همگرای نقطه‌وار است ولی همگرای یکنواخت نیست و هم پیوسته است.

(۴) همگرای نقطه‌وار است ولی همگرای یکنواخت نیست و هم پیوسته نیست.

۸۲- فرض کنید (X, d) فضای متریک و $x_0 \in X$. برای هر n تابع f_n بر X به صورت $f_n(x) = \frac{d(x, x_0)}{1+n d(x, x_0)}$

تعریف می شود. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ همگرای یکنواخت است.

(۲) $\{f_n\}$ هم پیوسته نیست و سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ همگرای نقطه ای نیست.

(۳) $\{f_n\}$ هم پیوسته است ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ همگرای یکنواخت نیست.

(۴) $\{f_n\}$ هم پیوسته نیست ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ همگرای نقطه ای است.

۸۳- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع پیوسته بر $[0, 1]$ باشد که به تابع پیوسته f نقطه وار همگرا است. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $\{f_n\}$ هم پیوسته باشد آنگاه $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به f است.

(۲) اگر $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ آنگاه $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به f است.

(۳) اگر $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار باشد آنگاه $\{f_n\}$ بر دنباله ای یکنواخت همگرا به f دارد.

(۴) اگر $\{f_n\}$ هم پیوسته باشد آنگاه لزوماً $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به f نیست ولی زیر دنباله ای یکنواخت همگرا به f دارد.

۸۴- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد نامنفی باشد و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A$. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر سری $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه $A = +\infty$ و اگر $A \in \mathbb{R}$ ، آنگاه سری $\sum a_n$ همگرا به A است.

(۲) اگر سری $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه $A = +\infty$ ولی اگر $A \in \mathbb{R}$ ، آنگاه سری $\sum a_n$ لزوماً همگرا نیست.

(۳) اگر $A = +\infty$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است و اگر $A \in \mathbb{R}$ ، آنگاه سری همگرا به A است.

(۴) اگر $A = +\infty$ آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است و اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

۸۵- کدام گزینه جبر چگال $C([-1, 1])$ است؟

(۱) $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^{rk} : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

(۲) $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^{rk+1} : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

(۳) $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^{rk} : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

(۴) $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^{k^2} : n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

۸۶- فرض کنید R و S دو حلقه باشند و $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت کدام گزینه همواره یک ایده‌آل است؟

- (۱) $\text{Im } f$ (۲) $\text{ker } f$
(۳) $Z(R)$ (مرکز R) (۴) $\text{Im } f$ و $\text{ker } f$

۸۷- فرض کنید $G = \mathbb{Z}_6$ و $H = \langle 3 \rangle$ و $K = \langle 2 \rangle$. در این صورت مرتبه زیرگروه‌های HK و $H \cap K$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱ و ۶ (۲) ۶ و ۶
(۳) ۳ و ۶ (۴) ۶ و ۳۶

۸۸- تعداد همریختی‌های گروهی یک به یک $\varphi: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ چند تا است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۸

۸۹- تعداد همریختی‌های حلقه‌ای از $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به \mathbb{Z} برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) بی‌نهایت

۹۰- گروه $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ دارای چند عضو از مرتبه ۶ است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۴
(۳) ۱۲ (۴) ۶

۹۱- گروه ماتریس‌های 3×3 وارون پذیر روی میدان \mathbb{Z}_5 را با $GL_3(\mathbb{Z}_5)$ نمایش می‌دهیم. اگر H_1 زیرگروه

$GL_3(\mathbb{Z}_5)$ متشکل از تمام ماتریس‌های با دترمینان یک باشد، آنگاه:

- (۱) H_1 زیرگروهی نرمال است و اندیس H_1 در $GL_3(\mathbb{Z}_5)$ پنج است.
(۲) H_1 زیرگروهی نرمال نیست و اندیس H_1 در $GL_3(\mathbb{Z}_5)$ چهار است.
(۳) H_1 زیرگروهی نرمال است و اندیس H_1 در $GL_3(\mathbb{Z}_5)$ چهار است.
(۴) H_1 زیرگروهی نرمال نیست و اندیس H_1 در $GL_3(\mathbb{Z}_5)$ پنج است.

۹۲- گروه متناهی G و عدد اول p مفروض است به طوری که دقیقاً p عضو آن متعلق به مرکز نیستند. G چند عضو دارد؟

- (۱) $p+1$ (۲) $p+2$
(۳) p^2+1 (۴) $2p+1$

۹۳- حلقه $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^4-1 \rangle}$ با کدام گزینه یکرخت است؟

- (۱) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$
(۳) $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (۴) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

۹۴- فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه متناهی از مرتبه p^n باشد به طوری که $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

اگر $x \in G \setminus Z(G)$ قرار می‌دهیم: $M = \{g \in G \mid xg = gx\}$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $M = Z(G)$ (۲) $G = M$

(۳) M یک زیرگروه سره $Z(G)$ است. (۴) اندیس (شاخص) M در G برابر p است.

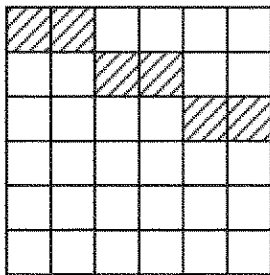
۹۵- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد و M_1 و M_2 ایده‌آل‌های ماکزیمال و متمایز R باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{R}{M_1} &\cong \frac{R}{M_2} \\ (2) \quad \frac{R}{M_1 M_2} &\cong \frac{R}{M_1} \times \frac{R}{M_2} \\ (3) \quad \frac{R}{M_1 + M_2} &\cong \frac{R}{M_1} \times \frac{R}{M_2} \\ (4) \quad \frac{R}{M_1 \cap M_2} &\cong \frac{R}{M_1} \cap \frac{R}{M_2} \end{aligned}$$

۹۶- فرض کنیم $f(x) = \frac{2}{1-2x} + \frac{G(x)}{(1-x)^2}$ تابع مولد دنباله ... و ۱۲۱ و ۵۸ و ۲۷ و ۱۲ و ۵ و ۲ و ۱ باشد. کدام گزینه در مورد $G(2)$ درست است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad G(2) &< 0 \\ (2) \quad 1 &\leq G(2) \leq 3 \\ (3) \quad 0 &\leq G(2) < 1 \\ (4) \quad G(2) &> 3 \end{aligned}$$

۹۷- فرض کنیم C صفحه شطرنجی زیر شامل خانه‌های هاشور نخورده باشد. اگر $x \times 4!$ تعداد حالت‌هایی باشد که می‌توان شش رخ را در صفحه C قرار داد به‌طوری‌که یکدیگر را نزنند، کدام گزینه درست است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad x &\geq 12 \\ (2) \quad x &\in [4, 8) \\ (3) \quad x &\in [0, 4) \\ (4) \quad x &\in [8, 12) \end{aligned}$$

۹۸- فرض کنیم P_n تعداد جایگشت‌هایی مانند $f: \{1, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, \dots, 2n\}$ است. به‌طوری‌که در تجزیه دوری، طول بزرگترین دور آن برابر $2n$ است. P_4 چند است؟ (به عبارت دیگر اگر گراف G را یک گراف با مجموعه رأس‌های $\{1, \dots, 2n\}$ در نظر بگیریم به‌طوری‌که هر رأس i دقیقاً یک یال جهت‌دار خروجی به رأس $f(i)$ داشته باشد، G یک دور به طول $2n$ باشد.)

$$\begin{aligned} (1) \quad 7! \\ (2) \quad 4! \\ (3) \quad \frac{7!}{2} \\ (4) \quad 8! \end{aligned}$$

۹۹- از دو گزاره زیر کدام درست است؟

(الف) اگر G یک گراف همبند مسطح باشد، در هر ترسیم مسطح G تعداد ناحیه‌ها عددی ثابت است. (منظور از لاین گراف G ، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن برابر است با مجموعه یال‌های G . میان هر دو رأس $L(G)$ یال وجود دارد، اگر و تنها اگر یال‌های متناظر آنها در G به هم متصل باشند.)

(ب) اگر G یک گراف r -منظم همبند باشد که $r \geq 1$ ، در این صورت $L(G)$ (لاین گراف G) دور اولبری دارد.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هر دو (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۰۰- به چند طریق می‌توان مجموعه $\{1, 2, \dots, 15\}$ را به ۳ زیر مجموعه ۵ عضوی افراز کرد؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{15!}{(5!)^3} \\ (2) \quad \frac{15!}{(5!)^3 \times 3!} \\ (3) \quad \frac{15!}{(3!)^5} \\ (4) \quad \frac{15!}{(3!)^5 \times 5!} \end{aligned}$$

۱۰۱- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}}$ برابر با چند است؟

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 1 \\ \forall n \geq 3 \quad b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2} \end{cases}$$

(۱) ۳

(۲) -۲

(۳) ۱

(۴) حد ندارد.

۱۰۲- چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز و فاقد رقم صفر وجود دارد به طوری که هیچ دو رقم فردی مجاور نباشد؟

$$\binom{9}{5} \quad (۲)$$

(۴) هیچ کدام

$$5! \times 4! \quad (۱)$$

$$\binom{9}{5} 5! \times 4! \quad (۳)$$

۱۰۳- چند تابع $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 12\}$ وجود دارد که $f(9) = f(6) = f(5)$ و $f(5) \neq f(2)$ ؟

$$\frac{11 \times 12^7}{2} \quad (۱)$$

$$2 \binom{12}{8} \quad (۲)$$

$$\binom{12}{8} \quad (۳)$$

$$11 \times 12^7 \quad (۴)$$

۱۰۴- مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ دارای چند زیرمجموعه ۷ عضوی مانند A است، به طوری که باقی مانده هر دو عضو متمایز

A در تقسیم بر ۷ متفاوت باشد؟

$$10^7 \quad (۱)$$

$$7^{10} \quad (۲)$$

$$7! \times 10^7 \quad (۳)$$

$$7! \times 7^{10} \quad (۴)$$

۱۰۵- به چند طریق می توان ۱۰ عدد متمایز دو رقمی انتخاب کرد به طوری که حاصل ضرب آنها مضرب ۷ نباشد؟

$$\binom{77}{67} \quad (۲)$$

$$\binom{90}{10} - 14 \binom{76}{9} \quad (۴)$$

$$\binom{76}{10} \quad (۱)$$

$$\binom{90}{10} - 14 \binom{89}{9} \quad (۳)$$

جبر خطی عددی، بهینه سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۰۶- فرض کنید در حل یک دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ، داده های مسئله (b, A) ، ۸ رقم ددهی قابل اعتماد دارند و محاسبات مربوط به دستگاه در ماشینی با ۱۰ رقم ددهی برای نمایش اعداد حقیقی صورت می گیرند. اگر عدد حالت ماتریس A برابر با 10^3 باشد، آنگاه حداکثر تعداد ارقام ددهی قابل اعتماد در \bar{x} جواب محاسبه شده برای دستگاه، کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۱۰۷- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با n یک عدد زوج است. می دانیم $A = USV^T$ که در آن U و V ماتریس هایی متعامد نرمال و S یک ماتریس قطری است و داریم:

$$S_{ii} = \begin{cases} i, & \text{برای } i \text{ زوج} \\ \frac{1}{i}, & \text{برای } i \text{ فرد} \end{cases}$$

در این صورت، عدد حالت A در نرم اقلیدسی، کدام است؟

(۱) n^2

(۲) $(n-1)^2$

(۳) $n(n-1)$

(۴) $\frac{n}{n-1}$

۱۰۸- کدام گزینه در مورد تجزیه چولسکی برای ماتریس معین مثبت، نادرست است؟

(۱) در روند تجزیه، درایه محوری صفر ایجاد نمی شود.

(۲) هزینه محاسباتی کمتر از تجزیه LU برای ماتریس های کلی دارد.

(۳) فرایند تجزیه بدون انتخاب محورگزینه (سطری) ناپایدار است.

(۴) در فرایند تجزیه برای یک ماتریس، می توان معین مثبت بودن یا نبودن ماتریس را مشخص کرد.

۱۰۹- فرض کنید تجزیه مقدار تکین یک ماتریس متقارن A به صورت $A = USV^T$ ، با ماتریس های متعامد U و V و ماتریس قطری S ، در دست است. کدام گزینه درست نیست؟

(۱) اگر S تکین باشد، آنگاه A تکین است.

(۲) ماتریس های پایه برای برد A و پوچ A در دست هستند.

(۳) مقدارهای ویژه ماتریس A را می توان مشخص کرد.

(۴) A معین مثبت است اگر و تنها اگر درایه های قطری S اعدادی مثبت باشند.

۱۱۰- جواب مسئله کمترین مربعات خطی $\|A^T c - b\|_2$ با A ، $n \times n$ ، را می توان با حل مسئله $\min_c q(c)$ با $q(c)$

برابر با به دست آورد.

(۱) $c^T A^T A c - 2c^T A^T b$

(۲) $c^T A A^T c - 2c^T A b$

(۳) $c^T A A^T c - c^T A b$

(۴) $c^T A A^T c + 2c^T A b$

۱۱۱- مسئله اولیه را به صورت

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 - x_2 = 1 \\ &-x_1 + x_2 = -1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید. گزینه درست کدام است؟

- (۱) اولیه بی کران و دوگان ناشدنی است.
- (۲) اولیه و دوگان هر دو ناشدنی اند.
- (۳) اولیه ناشدنی و دوگان بی کران است.
- (۴) تعداد جواب های بهینه برای مسئله اولیه بی شمار است.

۱۱۲- مسئله برنامه ریزی خطی اولیه (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \max u &= b^T v \\ \text{s.t.} \quad &A^T v \leq 0 \quad (P) \end{aligned}$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست کدام است؟

- (۱) (P) نمی تواند بی کران باشد.
- (۲) (P) همواره جواب بهینه دارد.
- (۳) (P) یا ناشدنی است یا بی کران.
- (۴) اگر (D) ناشدنی باشد، آنگاه (P) بی کران است.

۱۱۳- مسئله اولیه (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \max u &= b^T v \\ \text{s.t.} \quad &A^T v = c \quad (P) \end{aligned}$$

و دوگان آن را (D) در نظر بگیرید. گزینه نادرست برای دو مسئله (P) و (D) کدام است؟

- (۱) هر دو نمی توانند بی کران باشند.
- (۲) هر دو نمی توانند ناشدنی باشند.
- (۳) اگر هر دو شدنی باشند، آنگاه هر دو جواب بهینه دارند.
- (۴) اگر یکی جواب بهینه داشته باشد، آنگاه دیگری هم جواب بهینه دارد.

۱۱۴- گزینه درست برای مسئله اولیه (P) به صورت

$$\begin{aligned} \max (b^T w + u^T v) \\ \text{s.t.} \quad &A^T w + v \leq c \quad (P) \\ &v \leq 0 \end{aligned}$$

و دوگان آن (D) کدام است؟

- (۱) (P) نمی تواند بی کران باشد.
- (۲) (P) همواره شدنی است.
- (۳) (P) می تواند شدنی یا ناشدنی باشد.
- (۴) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

۱۱۵- فرض کنید مسئله (P) به صورت

$$\max w = b^T u$$

$$\text{s.t. } A^T u = c \quad (P)$$

جواب بهینه دارد. بردار b را به \hat{b} تغییر دهید و مسئله جدید را (P') و دوگان آن را (D') بنامید. گزینه درست کدام است؟

(۱) (D') شدنی است.

(۲) (D') و (P') هر دو جواب بهینه دارند.

(۳) (D') نمی تواند جواب بهینه داشته باشد.

(۴) (D') بی کران نیست و (P') می تواند بی کران باشد.

۱۱۶- فرض کنید یک مسئله برنامه ریزی خطی اولیه (P) جواب بهینه دارد. دوگان (P) را (D) بنامید. اگر طرف راست یکی از قیود مسئله (P) تغییر داده شود و مسئله جدید را (P') و دوگان آن را (D') بنامیم، آنگاه (D')

(۱) می تواند جواب بهینه داشته باشد یا بی کران باشد

(۲) نمی تواند بی کران باشد

(۳) می تواند ناشدنی باشد

(۴) جواب بهینه دارد

۱۱۷- مسئله (P) را به صورت

$$\min u = b^T v$$

$$\text{s.t. } A^T v \leq 0 \quad (P)$$

در نظر بگیرید. گزینه درست کدام است؟

(۱) (P) نمی تواند بی کران باشد.

$$(2) \quad A^T v \leq 0, x \geq 0 \Rightarrow Ax = b$$

(۳) (P) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر $x \geq 0$ موجود باشد به طوری که $Ax = b$.

(۴) اگر $x \geq 0$ موجود باشد به طوری که $Ax = b$ ، آنگاه v وجود دارد به طوری که $A^T v \leq 0$ و $b^T v < 0$.

۱۱۸- فرض کنید یک جدول سیمپلکس مربوط به یک پایه B ، $m \times m$ ، برای یک مسئله برنامه ریزی خطی استاندارد در دست است. قرار است متغیر غیر پایه ای به جای یک متغیر پایه ای قرار داده شود. با فرض اینکه B^{-1} در دست

است، وارون ماتریس پایه ای جدید را می توان با کدام مرتبه عملیات اصلی (ضرب، جمع و تقسیم) به دست آورد؟

$$(1) \quad O(m)$$

$$(2) \quad O(m^2)$$

$$(3) \quad O(m^3)$$

$$(4) \quad O(m \log m)$$

۱۱۹- فرض کنید:

$$A^T u = 0 \Rightarrow u^T b = 0.$$

گزینه درست کدام است؟

(۱) $Ax = b$ جواب دارد.

(۲) $Ax = b$ ، $x \leq 0$ جواب ندارد.

(۳) $Ax = b$ ، $x \geq 0$ جواب ندارد.

(۴) $u^T A \bar{x} = b$ به ازای هر u و \bar{x} به طوری که $A \bar{x} = b$.

۱۲۰- مسئله اولیه برنامه ریزی خطی را به صورت

$$\begin{aligned} \max T &= b^T y + L^T v + u^T w \\ \text{s.t.} \quad & A^T y + v + w = c \quad (P) \\ & v \geq 0 \\ & w \leq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست کدام است؟

(۱) بی کران است.

(۲) همواره شدنی است و جواب بهینه دارد.

(۳) اگر (D) ناشدنی باشد، آنگاه (P) بی کران است.

(۴) همواره شدنی است ولی ممکن است بی کران باشد.

۱۲۱- معادله انتگرالی زیر، بر بازه $[0, 1]$ چند جواب دارد؟

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y(t)}{\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{t+1})} dt + e^x$$

(۱) جواب ندارد.

(۲) یک جواب دارد.

(۳) بی نهایت جواب دارد.

(۴) بیش از یک جواب دارد ولی تعداد جواب‌ها متناهی است.

۱۲۲- فرض کنید دنباله‌ای از توابع پیوسته بر مستطیل $D = [0, 1] \times [0, 1]$ باشد که به تابع f یکنواخت همگرا

است، f نسبت به y لیب‌شیتس است، $a_0 \in (0, 1)$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ جواب یگانه معادله زیر باشد:

$$y'(x) = f_n(x, y), \quad y(x_0) = a_n$$

کدام گزینه درباره معادله زیر، درست است؟

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = a_0$$

(۱) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ آنگاه دنباله توابع $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ یکنواخت همگرا به تابعی مانند y_0 است که جواب معادله است

ولی جواب لزوماً یگانه نیست.

(۲) ثابت $r > 0$ وجود دارد که اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه معادله دارای جواب است ولی جواب لزوماً یگانه نیست.

(۳) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ آنگاه دنباله توابع $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ یکنواخت همگرا به تابعی مانند y_0 است که جواب یگانه معادله است.

(۴) اگر دنباله $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ آنگاه معادله جواب ندارد.

۱۲۳- فرض کنید $h: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ تابعی به طور پیوسته مشتق پذیر باشد و $x(t)$ و $y(t)$ توابع مثبت و به ترتیب جواب معادله های «الف» و «ب» باشند.

$$\text{الف) } x' = x + \frac{1}{x}, \quad x(t_0) = a_0$$

$$\text{ب) } y' = h(y)(y + \frac{1}{y}), \quad y(t_0) = a_0$$

کدام مورد نادرست است؟

- (۱) دامنه تعریف تابع $y(t)$ کران دار است.
- (۲) تصویر خم های $x(t)$ و $y(t)$ یکسان است.
- (۳) دامنه تعریف تابع $y(t)$ شامل $(0, \infty)$ است.
- (۴) تابع h را می توان به گونه ای انتخاب کرد که دامنه تعریف تابع $y(t)$ برابر با \mathbb{R} باشد.

۱۲۴- کدام گزینه درباره معادله $x'' + cx' + (\sin t)x = 0$ درست است؟

- (۱) اگر $c > 0$ معادله حداقل یک جواب دارد که در بی نهایت به صفر میل می کند و اگر $c < 0$ معادله حداقل یک جواب بی کران دارد.
- (۲) هر جواب از معادله کران دار است ولی لزوماً در بی نهایت به صفر میل نمی کند.
- (۳) هر جواب از معادله در بی نهایت به صفر میل می کند.
- (۴) هر جواب از معادله بی کران است.

۱۲۵- کدام گزینه، درباره دستگاه معادلات زیر، درست است؟

$$\begin{cases} x_1' = x_1 y - x_1 x_2^2 \\ x_2' = x_2 y - x_2 x_1^2 \\ y' = -y + x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

- (۱) مبدأ مرکز است.
- (۲) مبدأ ناپایدار است.
- (۳) مبدأ پایدار نمایی است.
- (۴) مبدأ پایدار مجانبی است.

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی:

۱۲۶- فرض کنید ۱۰ سکه در یک جعبه قرار دارند که i امین سکه با احتمال $\frac{i}{10}$ ، شیر می آید. یک سکه به تصادف انتخاب نموده و آن را به دفعات پرتاب می کنیم. اگر ۵ پرتاب اول نتیجه اش شیر باشد، احتمال اینکه ۶ امین پرتاب نیز شیر باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{10} i^5 & \sum_{i=1}^{10} i^6 & \sum_{i=1}^{10} i^5 & \sum_{i=1}^{10} i^6 \\ & \frac{\sum_{i=1}^{10} i^5}{\sum_{i=1}^{10} i^6} & \frac{\sum_{i=1}^{10} i^6}{\sum_{i=1}^{10} i^5} & \frac{\sum_{i=1}^{10} i^6}{\sum_{i=1}^{10} i^6} & \frac{\sum_{i=1}^{10} i^5}{\sum_{i=1}^{10} i^5} \\ & \frac{1}{10} \frac{\sum_{i=1}^{10} i^6}{\sum_{i=1}^{10} i^5} & \frac{1}{10} \frac{\sum_{i=1}^{10} i^5}{\sum_{i=1}^{10} i^6} & \frac{1}{10} \frac{\sum_{i=1}^{10} i^6}{\sum_{i=1}^{10} i^6} & \frac{1}{10} \frac{\sum_{i=1}^{10} i^5}{\sum_{i=1}^{10} i^5} \end{aligned}$$

۱۲۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه $(0, 1)$ باشد. تابع چگالی احتمال جذر یک منهای X^2 $(Y = \sqrt{1 - X^2})$ ، کدام است؟

$$f(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, 0 < y < 1 \quad (1)$$

$$f(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 0 < y < 1 \quad (2)$$

$$f(y) = \frac{y}{1-y^2}, 0 < y < 1 \quad (3)$$

$$f(y) = \frac{1-y^2}{y}, 0 < y < 1 \quad (4)$$

۱۲۸- فرض کنید $U \sim U([0, 1])$ باشد. اگر $X = \lfloor nU \rfloor + 1$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، توزیع X کدام است؟ DU نمایانگر توزیع یکنواخت گسسته است.

$$DU(\{0, 1, \dots, n-1\}) \quad (2)$$

$$DU(\{1, \dots, n+1\}) \quad (4)$$

$$DU(\{1, \dots, n\}) \quad (1)$$

$$DU(\{0, 1, \dots, n\}) \quad (3)$$

۱۲۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع زیر باشد. اگر میانه توزیع X برابر ۱ باشد، مقدار c ، کدام است؟

$$F(x) = \begin{cases} a & x \leq 0 \\ b - e^{-cx} & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\ln 2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\ln 2}{2} \quad (4)$$

$$2 \ln 2 \quad (1)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

۱۳۰- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با شرط $E(X^2) = E(X)$ باشد. کدام مورد، درست است؟

$$\text{Var}(X) \leq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Var}(X) \geq \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\text{Var}(X) \leq \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\text{Var}(X) \geq \frac{1}{3} \quad (3)$$

۱۳۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی برنولی باشد، مقدار کوواریانس X با توان دوم خودش، کدام است؟

$$(2) \text{ میانگین این متغیر}$$

$$(4) \text{ یک}$$

$$(1) \text{ واریانس این متغیر}$$

$$(3) \text{ صفر}$$

۱۳۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی با میانگین یک باشد، احتمال اینکه فاصله این متغیر از میانگینش

بیشتر از ۲ باشد، کدام است؟

$$(2) \text{ حداقل یک چهارم است.}$$

$$(4) \text{ حداکثر یک چهارم است.}$$

$$(1) \text{ حداکثر یک دوم است.}$$

$$(3) \text{ حداقل یک دوم است.}$$

۱۳۳- فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۵ و $\frac{1}{4}$ و Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۶ و $\frac{1}{4}$ و مستقل از هم باشند، مقدار $P(X=Y)$ ، کدام است؟

$$\frac{\binom{10}{6}}{2^{11}} \quad (۲)$$

$$\frac{\binom{11}{6}}{2^{11}} \quad (۱)$$

$$\frac{\binom{11}{5}}{2^{10}} \quad (۴)$$

$$\frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} \quad (۳)$$

۱۳۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع احتمال‌های زیر باشند. مقدار $P(\frac{Y}{X} \geq 1)$ ، کدام است؟

x	-1	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

y	-2	-1
$P(Y=y)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{15} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{6}{15} \quad (۴)$$

۱۳۵- سه سکه سالم پرتاب می‌شوند و هر سکه‌ای که شیر آمده باشد دوباره پرتاب می‌شود. اگر Y نمایانگر تعداد شیرها در پرتاب‌های دوم باشد، $P(Y=2)$ ، کدام است؟

$$\frac{12}{64} \quad (۱)$$

$$\frac{9}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{32} \quad (۴)$$

۱۳۶- از بازه $(-1, 1)$ نقاط X و Y به‌طور تصادفی و مستقل از هم انتخاب می‌شوند. مقدار $E(\max(X, Y))$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

www.Sanjesh3.com

۱۳۷- یک تاس سالم که دارای یک وجه سبز رنگ، دو وجه آبی رنگ و سه وجه قرمز رنگ است را یک بار پرتاب می کنیم. اگر

$$X = \begin{cases} 1 & \text{وجه سبز رنگ مشاهده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{وجه آبی رنگ مشاهده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مقدار $\text{Cov}(X, Y)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{18}$

(۲) $\frac{1}{18}$

(۳) $-\frac{2}{18}$

(۴) $-\frac{1}{18}$

۱۳۸- فرض کنید $S = X + Y + Z$ بیانگر مجموع سه متغیر تصادفی مستقل یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ باشد. مقدار

$E(\text{Var}(X|S))$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{36}$

(۲) $\frac{1}{18}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) $\frac{1}{3}$

۱۳۹- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت با دامنه $(0, 1)$ باشد. اگر

$Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ باشد. توزیع حدی nY_n ، کدام است؟

$f(x) = 2(1-x)$ $0 < x < 1$

(۲) نرمال استاندارد

(۱) تباهیده در نقطه صفر

(۴) نمایی با میانگین $\frac{1}{2}$

(۳) نمایی با میانگین ۱

۱۴۰- اگر تعداد بازدیدهای یک صفحه اینترنتی از فرایند پواسون با نرخ ۲۰۰ بازدید در شبانه روز پیروی کند، احتمال

این که در یک ساعت دست کم یک بازدید از این صفحه صورت گیرد، کدام است؟

(۱) $1 - e^{-\frac{25}{3}}$

(۲) $1 - e^{-\frac{20}{3}}$

(۳) $1 - \frac{25}{3}e^{-\frac{25}{3}}$

(۴) $1 - \frac{20}{3}e^{-\frac{20}{3}}$

۱۴۱- فرض کنید $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ یک زنجیره مارکوف با فضای حالت $S = \{1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. مقدار $E[X_7 | X_4 = 2]$ کدام است؟

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(۱) $\frac{9}{8}$

(۲) $\frac{77}{64}$

(۳) $\frac{11}{8}$

(۴) $\frac{89}{64}$

۱۴۲- یک فروشگاه شیرهای تولیدی سه شرکت A، B و C را عرضه می کند. مشتری های فروشگاه مطابق با یک زنجیره مارکوف با ماتریس احتمال انتقال زیر شیر مصرفی خود را تغییر می دهند. برای مثال احتمال آن که یک مشتری که شیر B را خریداری کرده است، در نوبت بعد شیر C را خریداری کند $\frac{1}{3}$ است. در درازمدت چه کسری از مشتری ها شیر B را خریداری می کنند؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2}{7}$

(۳) $\frac{3}{7}$

(۴) $\frac{5}{7}$

۱۴۳- فرض کنید X تعداد نوزادان هر فرد در فرایند شاخه ای دارای توزیع زیر باشد. به طور متوسط در نسل دهم چند نفر در این جامعه است.

$$P(X=k) = 0.6 \times 0.4^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(۱) ۱

(۲) $\left(\frac{4}{6}\right)^{10}$

(۳) $\left(\frac{6}{4}\right)^{10}$

(۴) 2^{10}

۱۴۴- فرض کنید $\{X(t): t \geq 0\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $S = \{1, 2\}$ و ماتریس احتمال‌های انتقال وضعیت مطابق زیر باشد. مقدار $P\{X_2 = 2 | X_0 = 2\}$ کدام است؟

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

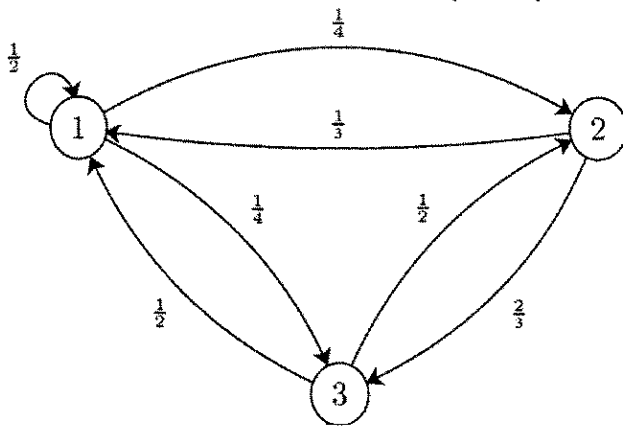
(۱) ۰/۳

(۲) ۰/۴۵

(۳) ۰/۵۵

(۴) ۰/۷

۱۴۵- فرض کنید $\{X(t): t \geq 0\}$ یک زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $S = \{1, 2, 3\}$ و احتمال‌های انتقال وضعیت



مطابق شکل زیر باشد. کدام مورد صحیح است؟

- (۱) این زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر و نادره‌ای نیست.
- (۲) این زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر و نادره‌ای است.
- (۳) این زنجیر مارکوف تحول‌ناپذیر است اما نادره‌ای نیست.
- (۴) این زنجیر مارکوف نادره‌ای است اما تحویل‌ناپذیر نیست.

www.Sanjesh3.com