

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. --- منع: ---

پیامبر اعظم (ص): روزه سپر آتش جهنم است.

۱. در مورد حد نقطه به نقطه دنباله  $f_n(x) = \frac{2n^p x^p}{1+n^p x^p}$  بر بازه  $[0,1]$  کدام گزینه درست است؟

الف. تابع  $f(x) = 2nx^p$  حد (نقطه به نقطه) آن است.

ب. تابع  $f(x) = 0$  حد آن است.

ج. تابع  $f(x) = x$  حد آن است.

د. تابع  $f(x) = 2x$  حد آن است.

۲. بیان شرط ریمان برای وجود انتگرال ریمان استیلیتیس کدام است؟

الف.  $\forall \epsilon \exists P_\epsilon \forall P(P \subseteq P_\epsilon \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon)$

ب.  $\forall \epsilon \exists P_\epsilon \forall P(P_\epsilon \subseteq P \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon)$

ج.  $\forall \epsilon \forall P_\epsilon \exists P(P_\epsilon \subseteq P \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon)$

د.  $\forall \epsilon \forall P_\epsilon \forall P(P_\epsilon \subseteq P \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon)$

۳. کدام حکم درست است؟

الف. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  مشتقپذیر باشد،  $f$  بر این بازه با تغییر کراندار است.

ب. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  مشتق کراندار داشته باشد، بر این بازه با تغییر کراندار است.

ج. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار باشد، بر این بازه مشتقپذیر است.

د. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار باشد،  $f$  بر این بازه مشتق کراندار دارد.

۴. تابع  $f(x) = [x^p + 1]$  بر  $[0, 3]$  چگونه تابعی است؟

الف. فقط پیوسته است.

ب. با تغییر کراندار است.

ج. پیوسته و با تغییر کراندار است.

د. مشتقپذیر و با تغییر کراندار است.

۵. تابع حد (نقطه به نقطه) دنباله توابع:  $f_n(x) = \frac{p+n-n^p x^p}{1+n^p x^p}$  بر  $[1, 2]$  کدام است؟

الف.  $f(x) = 0$  ب.  $f(x) = nx^p$  ج.  $f(x) = -x^p$  د.  $f(x) = x^p$

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: ---

۶. فرض کنیم  $f_n \Rightarrow f$  بر  $[a, b]$  و  $\int_a^b f_n d\alpha = \frac{1}{n}$  در این صورت  $\int_a^b f d\alpha$  برابر کدام است؟

الف.  $b - a$  ب.  $b + a$  ج.  $\infty$  د.  $0$

۷.  $\int_a^b f d\alpha$  که در آن  $f(x) = [x]$  و  $\alpha(x) = x^2$  برابر کدام است؟

الف.  $\frac{1}{2}$  ب.  $\frac{3}{2}$  ج.  $0$  د.  $2$

۸.  $\int_a^b [x] d[x]$  برابر کدام است؟

الف.  $1$  ب.  $\frac{1}{2}$  ج.  $2$  د. وجود ندارد.

۹.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  برابر کدام است؟

الف.  $\frac{\pi}{2}$  ب.  $-\frac{\pi}{2}$  ج.  $\pi$  د.  $-\pi$

۱۰. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^3}$  بر  $[2, 3]$  چگونه است؟

الف. به طور یکنواخت همگراست.  
ب. همگرا نیست.  
ج. فقط نقطه به نقطه همگراست.  
د. حکم کلی ندارد.

۱۱. فرض کنید تابع  $f$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار و  $V$  تابع تغییر کلی  $f$  بر این بازه باشد (یعنی

$$V(x) = \begin{cases} v_f(a, x) & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

الف. نزولی است. ب. ثابت است. ج. نه نزولی و نه صعودی است. د. صعودی است.

۱۲. سری  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  بر کدام بازه به طور یکنواخت همگراست؟

الف.  $[0, \frac{1}{2})$  ب.  $[1, \infty)$  ج.  $[0, a]$  که  $1 < a$  د.  $[0, \infty)$

۱۳. فرض کنیم  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع بر  $E$  و نقطه به نقطه به تابع  $f$  همگرا باشد. همچنین:

$$\sigma_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

هرگاه  $\sigma_n \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  آنگاه:

الف. دنباله توابع فقط همگراست.  
ب. دنباله توابع به تابع  $f(x) = 1$  همگراست.  
ج. دنباله توابع به تابع  $f(x) = 0$  همگراست.  
د. دنباله توابع به طور یکنواخت همگراست.

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

منبع: --

مجاز است.

استفاده از: --

گد سری سؤال: یک (۱)

۱۴. هرگاه  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  و  $f_k(x) = \frac{x}{k(k+1)}$  و  $S_n(x) \rightarrow S(x)$ ، آنگاه  $S(x)$  کدام است؟

الف.  $S(x) = 1$  ب.  $S(x) = \frac{x}{2n}$  ج.  $S(x) = 1$  د.  $S(x) = x$

۱۵. هرگاه  $\delta > 0$ ، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\delta}}$  بر  $[1 + \delta, \infty)$  چگونه است؟

الف. واگرا ب. فقط همگرا ج. به طور یکنواخت همگرا د. واگرا به  $\infty$

۱۶. بیان شرط کوشی برای همگرایی یکنواخت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  معادل کدام است؟

الف.  $\forall \varepsilon \exists N \forall n \forall P \forall x (x \in E, n > N, P > N \Rightarrow |\sum_{k=1}^P f_k(x)| < \varepsilon)$

ب.  $\forall \varepsilon \exists N \forall n \forall x (x \in E, n > N \Rightarrow |\sum_{k=1}^P f_{n+k}(x)| < \varepsilon)$

ج.  $\forall \varepsilon \exists N \forall n \forall x (x \in E, n > N \Rightarrow |\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| < \varepsilon)$

د.  $\forall \varepsilon \exists N \forall n \forall m (m > n > N \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^m f_k(x)| < \varepsilon)$

۱۷. تعریف «تابع با تغییر کراندار f بر [a, b]» کدام است؟

ب.  $\exists P \forall M (\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| < M)$

الف.  $\forall P \exists M (\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| < M)$

د.  $\forall M \exists P (\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| < M)$

ج.  $\exists M \forall P (\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| < M)$

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

منبع: --

مجاز است.

استفاده از: --

گد سری سوال: یک (۱)

۱۸. فرض کنیم  $f: R \rightarrow R^n$  یک تابع برداری  $f = (f_1, \dots, f_n)$  و هر  $f_i \in R$ ،  $\int_a^b f$  برابر کدام است؟

ب.  $\sum_{i=1}^n \int_a^b f_i^p$

الف.  $\sum_{i=1}^n \int_a^b f_i$

د.  $(\int_a^b f_1^p, \int_a^b f_2^p, \dots, \int_a^b f_n^p)$

ج.  $(\int_a^b f_1, \int_a^b f_2, \dots, \int_a^b f_n)$

۱۹. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$  بر  $(-\infty, \infty)$  چگونه است؟

ب. به طور یکنواخت همگراست.

الف. فقط همگراست.

ب. مواگرا به  $\infty$  است.

ج. واگراست.

۲۰. شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  برابر کدام است؟

د.  $\infty$

ج. ۲

ب. ۱

الف. ۲

سوالات تشریحی

۱. ثابت کنید هرگاه  $f, g \in R(\alpha)$  و همواره  $f \leq g$  آنگاه  $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$  (۵/۱ نمره)

۲. فرض کنیم  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  به طور یکنواخت همگرا و دنباله  $\{g_n\}$  به طور یکنواخت کراندار باشد.

ثابت کنید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست. (۵/۱ نمره)

۳. الف) تابع با تغییر کراندار را تعریف کنید. یک مثال از تابع با تغییر کراندار و یک مثال از تابعی که با تغییر کراندار نباشد ارائه دهید.

ب) تغییر کلی یک تابع با تغییر کراندار را تعریف کنید.

ج) نشان دهید تابع تغییر کلی (در صورت وجود) تابعی صعودی است. (۳ نمره)

۴. فرض کنیم  $f$  و  $g$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار باشند.

الف) ثابت کنید برای هر دو عدد ثابت  $A$  و  $B$  تابع  $Af + Bg$  نیز بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار است.

ب) آیا تابع  $\frac{1}{f}$  بر  $[a, b]$  با تغییر کراندار است. توضیح دهید. (۳ نمره)