

کد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: مقدمه ای بر تناظر گالوا

پیامبر اعظم (ص): روزه سپر آتش جهنم است.

۱. کدامیک درست است؟

الف. گروه $H \times K$ حل پذیر است $\Leftrightarrow H$ و K حل پذیر باشند.

ب. هر گروه ساده حل پذیر است.

ج. گروه D_n برای هیچ $n \in \mathbb{N}$ حل پذیر نیست.

د. مرتبه یک گروه حل پذیر ساده می تواند عددی غیر اول نیز باشد.

۲. کدام چند جمله ای تحویل ناپذیر است؟

الف. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7 \in \mathbb{Q}[x]$ ب.

الف. $f(x) = 3x^4 + x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$

ب. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \in \mathbb{Q}[x]$ د.

ج. $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$

۳. فرض کنید $K < F$ و $u \in F$ باشد. در چه صورتی یک یکرختی $K[x] \rightarrow K[u]$ یک یکرختی از $K[x]$ به $K[u]$ القا میکند؟

الف. باید u متعالی باشد.

ب. u می تواند جبری یا متعالی باشد.

ج. باید u جبری باشد.

د. u هر عنصری از F می تواند باشد.

۴. فرض کنید $K < F$ و $u \in F$ روی K جبری از درجه ۲۰ باشد در این صورت:

الف. $[K(u) : K] = 10$

ب. $[K(u) : K] = 40$

ج. $[K(u) : K] = 20$

د. کدام گزاره درست است؟

الف. به ازای هر چند جمله ای تحویل ناپذیر K تکی از درجه n در $K[u]$ یک توسیع ساده $K(u) = F$ از K وجود دارد که

چند جمله ای مینیمال u روی K برابر f است.

ب. هر گاه F یک توسیع میدانی از میدان K و σ یک K -خودریختی F باشد. در این صورت ممکن است u روی K جبری

باشد ولی $\sigma(u)$ چنین نباشد.

ج. عناصر مزدوج متفاوت دارای چند جمله ای های مینیمال متفاوت هستند.

د. $[Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q] = 2$

۶. هرگاه $a, b \in Q$ ، آنگاه $u = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ روی Q دارای کدام یک از درجات زیر است؟

الف. ۲ ب. ۶ ج. ۱ د. بستگی به مقادیر a و b دارد.

۷. کدام یک از میدان های زیر بسته جبری است؟

الف. R ب. Q ج. $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ د. C

منبع: مقدمه ای بر تناظر گالوا

مجاز است.

استفاده از: ---

گد سری سؤال: یک (۱)

۸. کدام گزاره درست است؟

الف. میدانهای شکافنده یک چند جمله ای f روی میدان K ممکن است یکرخت نباشند.

ب. تعداد اعضای یک میدان متناهی یک عدد اول است.

ج. هرگاه $K < E < F$ و F میدان شکافنده f روی K باشد آنگاه F نیز میدان شکافنده f روی F است.

د. میدان شکافنده چند جمله ای $X^3 - 3$ دارای ۸ عضو است.

۹. فرض کنید F میدان شکافنده چند جمله ای $X^{11} - 1$ باشد. در این صورت به ازای هر $a, b \in F$:

ب. $(a - b)^{11} = a^{11} - b^{11}$

الف. $(a - b)^9 = a^9 - b^9$

د. $(a - b)^{27} = a^{27} - b^{27}$

ج. $(a - b)^3 = a^3 - b^3$

۱۰. اگر F میدان شکافنده چند جمله ای $X^{15} - 1$ روی میدان اعداد حقیقی R باشد، تعداد مولدهای $F^* = F - \{0\}$ برابر است با:

د. ۲۴

ج. ۱۰

ب. ۵

الف. ۲۵

۱۱. فرض کنید $K < F$ و K میدانی با مشخصه صفر باشد که $[F : K]$ متناهی است و $G = \text{Gal}_K F$. در این صورت کدام

گزاره با سه گزاره دیگر معادل نیست؟

الف. $O(G) = [F : K]$

ب. K در F بسته است.

د. $o(G)$ ممکن است نامتناهی باشد.

ج. F توسیع نرمال K است.

۱۲. در مورد میدان $Q(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ اگر $G = \text{Gal}_Q F$ باشد کدام درست است؟

ب. F میدان شکافنده $f(x) = (x^2 - \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{5})$ روی Q است.

الف. G گروهی از مرتبه ۲ است

د. $G \cong Z_6 \times Z_6$

ج. $G \cong Z_6$

۱۳. فرض کنید $E = K(\xi_m)$ که ξ_m یک ریشه m -ام اولیه واحد است و $F = E(u)$ و $G = \text{Gal}_E E$ کدام گزینه درست

است؟

ب. E یک میدان شکافنده چند جمله ای $f(x) = x^m - u^m$ روی E است.

الف. G یک گروه نامتناهی است.

د. E ، $m - 1$ عضو دارد.

ج. E ، m عضو دارد.

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی / کد درس: ریاضی (۱۱۱۰۴۲)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. منبع: مقدمه ای بر تناظر گالوا

۱۴. فرض کنید \mathcal{C} میدان اعداد مختلط و F توسیعی از \mathcal{C} باشد. در این صورت:

الف. $[F:\mathcal{C}] \neq 2$ ب. $[F:\mathcal{C}] = 1$ ج. $[F:\mathcal{C}] = 2^n$ (برای $n \in \mathbb{N}$) د. $2 \nmid [F:\mathcal{C}]$

۱۵. فرض کنید $K < F$ و $G = \text{Gal}_K F$. در این صورت:

الف. G همواره گروهی حل پذیر است. ب. G همواره گروهی نامتناهی است.
ج. G همواره گروهی غیر حل پذیر است. د. اگر F یک توسیع رادیکال K باشد، G حل پذیر است.

۱۶. گروه گالوای چند جمله ای $f(x) = x^5 + 5x^4 - 5$ در $\mathbb{Q}[x]$ با کدام گروه یکرخت است؟

الف. Z_5 ب. D_5 ج. S_5 د. S_4

۱۷. در مورد مجموعه \mathcal{C} تشکیل از اعداد ساخت پذیر، کدام گزینه درست است؟

الف. اگر $c \in \mathcal{C}$ و $c > 0$ ، آن گاه $\sqrt{c} \in \mathcal{C}$ ب. \mathcal{C} شامل اعداد حقیقی است.
ج. \mathcal{C} زیر مجموعه اعداد گویاست. د. \mathcal{C} شامل اعداد مختلط است.

۱۸. هرگاه K میدانی باشد که مشخصه آن عدد n را عاد نمی کند و $\Phi_n(x)$ چند جمله ای دایره n - ام روی K باشد، آنگاه درجه $\Phi_n(x)$ برابر است با:

الف. n ب. n^p ج. $\phi(n)$ (تابع اولر) د. تعداد مقسوم علیه های n

۱۹. فرض کنید $f, g \in Z[x]$ ، p اول باشد. کدام گزینه در حلقه چند جمله ای $Z_p[x]$ برقرار نیست؟

الف. اگر $f \mid g$ در $Z[x]$ ، آن گاه $\hat{f} \mid \hat{g}$ در $Z_p[x]$.

ب. $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}$

ج. $\hat{f} \cdot \hat{g} = \widehat{f \cdot g}$

د. هرگاه $f_p(x) = (f(x))^p$ آنگاه $\hat{f}_p = (\hat{f})^p$

۲۰. در چه صورت یک چند ضلعی منتظم با n ضلع ساخت پذیر است؟

الف. n عدد اول باشد.

ب. اساساً تمام n ضلعی های منتظم به ازای هر n ساخت پذیر است.

ج. $[Q(\xi_n):Q]$ توان از ۲ باشد که در آن ξ_n ریشه n ام واحد است.

د. n مربع کامل باشد.

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۲)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

منبع: مقدمه ای بر تناظر گالوا

مجاز است.

استفاده از: ---

گد سری سؤال: یک (۱)

سئوالات تشریحی

(بارم هر سؤال ۲ نمره)

۱. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$. اگر عدد اول P وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم

$P \mid a_i$ و $P \nmid a_n$ ، آنگاه نشان دهید که f در $\mathbb{Q}(x)$ تحویل ناپذیر است.

۲. الف. فرض کنید K میدانی جبری - بسته باشد. در این صورت نشان دهید که هر چند جمله ای نا ثابت در $K[x]$ حاصل ضربی از عاملهای خطی در $K[x]$ است؟

ب. نشان دهید که $\deg(Q \mid \mathbb{Q}(\sqrt{p-1})): \mathbb{Q} \leq 6$

۳. فرض کنید K یک میدان و $f \in K[x]$ از درجه n باشد. در این صورت میدان F که میدان شکافنده f روی K است وجود دارد و $[F:K] \leq n!$

۴. فرض کنید $K < F$ که F یک توسیع نرمال متناهی از K است. در این صورت $F = K(u)$ برای $u \in F$ ؛ یعنی، F یک توسیع ساده K است.

۵. الف. عمل هر عنصر از گروه گالوای میدان $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, i)$ روی \mathbb{Q} را روی عناصر پایه F روی \mathbb{Q} با رسم جدول مشخص کنید.

ب. نشان دهید هرگاه زاویه $\theta \in \mathbb{R}$ ساخت پذیر باشد، آن گاه عدد $\cos \theta$ نیز ساخت پذیر است.