

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سوال: یک (۱) استفاده از: -- مجاز است. -- منبع: --

پیامبر اعظم (ص): روزه سپر آتش جهنم است.

توجه: در سوالات زیر تمامی حلقه‌ها، حلقه‌های جابجایی، یکدار و نابديهی هستند.

۱. فرض کنید  $A$  و  $B$  زیر گروه‌هایی از زیر گروه  $G$  باشند. تحت کدام یک از شرایط زیر، به ازای هر  $u \in A$  و  $v \in B$

خواهیم داشت  $uv = vu$  ؟

الف. اگر  $A$  زیر گروه نرمال از  $G$  باشد.

ب. اگر  $A$  و  $B$  زیر گروه‌های نرمال از  $G$  باشند.

ج. اگر  $A \cap B = \{e\}$

د. اگر  $A \cap B = \{e\}$  و  $A$  و  $B$  زیر گروه‌های نرمال از  $G$  باشند.

۲. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $A$  و  $B$  دو زیر گروه از  $G$  باشند. در این صورت :

الف.  $|AB|$  ممکن است نامتناهی باشد.

ب.  $|A \cap B| \mid |AB|$

ج.  $|AB| \mid |A|$

د.  $|AB| \mid |A \cap B|$

۳. کدام یک از مجموعه‌های زیر با زیر گروه نرمال ساز  $N(H)$  برابر است؟ ( $H$  یک زیر گروه  $G$  می‌باشد).

الف.  $\{g \in G \mid gH = Hg\}$

ب.  $\{g \in G \mid \forall x \in H, gx = xg\}$

ج.  $\{g \in G \mid \forall x \in H, gxg^{-1} = x\}$

د.  $\{x \in H \mid xH = Hx\}$

۴. فرض کنید  $G$  یک گروه،  $a \in G$  و  $C(a)$  مرکز ساز  $a$  باشد. فرض کنید  $[a]$  کلاس مزدوجی  $a$  باشد. در این صورت

برای هر  $x \in G$ ، کدام گزینه درست می‌باشد؟

ب.  $|[a]| \leq [G : C(a)]$

الف.  $|[a]| = [G : C(a)]$

د. چیزی نمی‌توان گفت.

ج.  $[G : C(a)] \leq |[a]|$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: جبر ۲  
رشته تحصیلی / گد درس: ریاضی (۱۱۱۰۴۸)

گد سری سؤال: یک (۱)	استفاده از: ---	مجاز است. ---	منبع: ---
۵. کدام گزینه درست است؟			
الف. هر گروه از مرتبه ۲۰۰ ساده است.		ب. هر گروه از مرتبه ۳۳ آبلی است.	
ج. گروه آبلی از مرتبه ۲۵۵ وجود دارد.		د. گروه آبلی از مرتبه ۴۵۵ وجود دارد.	
۶. کدام یکی از گروه های زیر ساده اند؟			
الف. گروهی از مرتبه ۵۶		ب. گروهی از مرتبه ۲۰۰	
ج. گروهی از مرتبه ۶۶		د. گروهی از مرتبه ۳۷	
۷. فرض کنید $G$ گروهی از مرتبه ۲۲۵ باشد. فرض کنید $H$ یک ۵ - زیر گروه سیلوی $G$ و $K$ یک ۷ - زیر گروه سیلوی $G$ باشد. در این صورت:			
الف. $ HK  <  H  \cdot  K $		ب. $ G  >  HK $	
ج. $G$ غیر آبلی است.		د. $G = HK$	
۸. فرض کنید $G$ یک گروه از مرتبه ۲۴ باشد. در این صورت:			
الف. $G$ دارای بیش از یک ۲ - زیر گروه سیلو و بیش از یک ۳ - زیر گروه سیلو است.			
ب. $G$ تنها دارای یک ۲ - زیر گروه سیلو و یا تنها یک ۳ - زیر گروه سیلو است.			
ج. $G$ هیچ زیر گروه نرمال غیر بدیهی ندارد.			
د. $G$ ساده است.			
۹. فرض کنید $G$ گروهی از مرتبه ۱۲۱ باشد. در این صورت مرتبه مرکز $G$ برابر است با:			
الف. ۲	ب. ۱	ج. ۱۲۱	د. ۱۱
۱۰. هر گروه از مرتبه ۲۰۰ چند ۵ - زیر گروه سیلو دارد؟			
الف. ۲۵	ب. ۱	ج. ۵	د. ۸

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی / گزینش: ریاضی (۱۱۱۰۴۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ☐ ندارد ☒

کد سری سوال: یک (۱)

استفاده از: ---

مجاز است.

منبع: ---

۱۱. فرض کنید  $M$  یک مدول روی حلقه  $R$  و ایده‌آلی از  $R$  باشد. در این صورت تحت کدام یک از شرایط زیر  $M$  دارای

ساختار  $\frac{R}{I}$  - مدولی نیز هست؟

ب.  $IM$  زیر مدول واقعی  $M$  باشد.

الف.  $IM$  برابر صفر باشد.

د.  $IM$  زیر مدول ناصفر و واقعی  $M$  باشد.

ج.  $IM$  برابر  $M$  باشد.

۱۲. فرض کنید  $M$  یک مدول روی حلقه  $R$  باشد و  $G$  و  $G_1$  زیرمدول‌هایی از  $M$  باشند به طوری که  $G \subseteq G_1$  و  $I$

ایده‌آلی از  $R$  باشد. در این صورت  $I \left( \frac{G_1}{G} \right)$  با کدام یک از مدول‌های خارج قسمتی زیر برابر است؟

ب.  $\frac{IG_1}{G}$

الف.  $\frac{IG_1}{IG}$

د.  $\frac{G_1}{G}$

ج.  $\frac{IG_1 + G}{G}$

۱۳. گروه جمعی اعداد گویا به عنوان  $Z$  - مدول

ب. نه نوتری است و نه آرتینی است.

الف. نوتری است ولی آرتینی نیست.

د. هم نوتری است و هم آرتینی است.

ج. نوتری نیست ولی آرتینی است.

۱۴. فرض کنید  $F$  یک مدول آزاد باشد. در این صورت:

الف. هر دو پایه  $F$  دارای عدد اصلی یکسان است.

ب. اگر  $F$  دارای پایه‌ای متناهی باشد، آنگاه هر پایه دیگر  $F$  نیز متناهی است.

ج.  $F$  دارای حداقل یک پایه متناهی است.

د. اگر  $F$  دارای پایه‌ای متناهی باشد آنگاه  $F$  متناهی است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی / گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۸)

گد سری سوال: یک (۱) استفاده از: --- مجاز است. --- منیع: ---

۱۵. کدام گزینه درست است؟

الف. طول یک حلقه متناهی برابر با تعداد عناصر ناصفرش است.

ب. هر حلقه با طول متناهی، حلقه‌ای متناهی است.

ج. هر حلقه متناهی، دارای طول متناهی است.

د. حلقه متناهی می‌تواند دارای طول نامتناهی باشد.

۱۶. فرض کنید  $f: M \rightarrow N$  یک هم‌ریختی  $R$ -مدول‌ها باشد. در این صورت:

الف.  $\frac{M}{\text{Ker } f}$  با  $N$  یکرخت است.

ب.  $M$  با  $f(M)$  یکرخت است.

ج. اگر  $f$  پوشا باشد آنگاه  $N$  با زیر مدولی از  $M$  یکرخت است.

د. اگر  $f$  یک به یک باشد آنگاه  $M$  با زیر مدولی از  $N$  یکرخت است.

۱۷. کدام یک از حلقه‌های زیر نوتری نیست؟

الف.  $Z[x]$

ب.  $Z[i]$

ج.  $Z[x, y]$

د.  $Q[x]$

۱۸. فرض کنید  $I$  ایده‌آلی از حلقه  $R$  باشد به طوری که  $I \subseteq \text{Jac}(R)$ . در این صورت  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$  با کدام یک برابر است؟

الف.  $\emptyset$

ب.  $0$

ج.  $R$

د.  $I$

۱۹. هرگاه  $V$  یک فضای برداری روی میدان  $K$  باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

الف.  $V$  هم‌آرتینی است و هم نوتری است.

ب.  $V$  آرتینی است اما نوتری نیست.

ج.  $V$  تنها نوتری است.

د.  $V$  نه نوتری است و نه آرتینی

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی / گد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۸)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: ---

مجاز است.

منبع: ---

۲۰. در کدام یک از حالات زیر دنباله  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  دقیق (کامل) نمی باشد؟

الف.  $l(M_0) = 5, l(M_1) = 3, l(M_2) = 1, l(M_3) = 4$

ب.  $l(M_0) = 7, l(M_1) = 1, l(M_2) = 6, l(M_3) = 1$

ج.  $l(M_0) = 6, l(M_1) = 3, l(M_2) = 4, l(M_3) = 7$

د.  $l(M_0) = 3, l(M_1) = 2, l(M_2) = 5, l(M_3) = 5$

سوالات تشریحی:

بارم هر سؤال ۲ نمره

۱. تعداد اعضاء از مرتبه ۷ در یک گروه ساده  $G$  از مرتبه ۱۶۸ را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید  $G$  یک مدول روی حلقه  $R$  باشد. نشان دهید  $G$  با طول متناهی است اگر و تنها اگر  $G$  با تولید متناهی بوده و  $n \in N$

و ایده آل های ماکسیمال  $M_1, \dots, M_n$  از  $R$  موجود باشند به طوری که:

$$M_1 \dots M_n G = 0$$

۳. فرض کنید  $R$  یک حلقه آرئینی باشد و  $N = \sqrt{0}$  رادیکال پوچ  $R$  باشد. نشان دهید  $t \in N$  وجود دارد به طوری که

$$N^t = 0$$

۴. فرض کنید  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  یک خانواده از نمادها باشند که با مجموعه ناتهی  $\wedge$  اندیس گذاری شده است. فرض کنید  $R$  یک

حلقه باشد. روش ساختن  $R -$  مدول آزادی مانند  $F$  با پایه  $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  را به طور کامل بیان و ثابت کنید.

۵. فرض کنید  $M$  یک مدول روی حلقه  $R$  باشد. نشان دهید  $M$  نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول  $M$  با تولید متناهی باشد.