

نام درس: آمار ریاضی (۲)

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و آمار ریاضی (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

منبع: ---

پیامبر اعظم (ص): روزه سپر آتش جهنم است.

۱. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد که در آن  $\sigma^2$  معلوم است، یک فاصله اطمینان  $(1-\alpha)100\%$  برای  $\mu$  کدام است؟

ب.  $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

الف.  $\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$

د.  $\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$

ج.  $\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

۲. نمونه‌ای تصادفی ۱۰۰ تایی از  $N(\mu, \sigma^2)$  را در برداشته باشد کدام است؟

د. ۱

ب. ۰/۹۹

ب. ۰/۹۵

الف. ۰/۹

۳. فرض  $X$  یک تک مشاهده از  $0 < x < 1$ ;  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$  باشد. اگر  $1-\alpha = P\left(\frac{\log X}{\log 2} < \theta < \frac{-\log X}{\log 2}\right)$

امید ریاضی طول بازه کدام است؟

د.  $\frac{\log 2}{\theta}$

ج.  $\frac{\theta}{2}$

ب.  $\theta \log 2$

الف.  $\frac{2\theta}{\log 2}$

۴. فرض کنید  $\bar{X} \pm \frac{pS}{\sqrt{n}}$  یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای  $\mu$  در توزیع نرمال باشد اگر  $E(S) = K$  باشد، واریانس طول بازه اطمینان کدام است؟

ب.  $(n-1) \frac{\sigma^2}{n}$

الف.  $\frac{\sigma^2}{n}$

د.  $\frac{16}{n} (\sigma^2 - k^2)$

ج.  $\frac{\sigma^2}{n} + k$

نام درس: آمار ریاضی (۲)

رشته تحصیلی/گد درس: آمار و آمار ریاضی (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از ماشین حساب مجاز است. منبع: --

۵. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد که در آن هر دو پارامتر  $\mu$  و  $\sigma^2$  نامعلومند. بازه اطمینان  $(1 - \alpha)$  برای  $\sigma^2$  کدام است؟

الف.  $\left( \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2}, \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2} \right)$

ب.  $\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$

ج.  $\left( \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)}{(n-1)S^2}, \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)}{(n-1)S^2} \right)$

د.  $\left( \frac{(n-2)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-2)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$

۶. طول بازه اطمینان برای  $\sigma$  از جامعه نرمال با افزایش حجم نمونه به ..... نزدیک می شود.

الف. ۱ ب. صفر ج. ۲ د. ۳

۷. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_m$  یک نمونه تصادفی  $m$  تایی از توزیع  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  و  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  یک نمونه  $n$  تایی از توزیع  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  باشند و دو نمونه مستقل فرض می شوند اگر  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  محمول باشد یک فاصله اطمینان برای  $\mu_1 - \mu_2$  در سطح  $(1 - \alpha)$  کدام است؟

الف.  $(\bar{X} - \bar{Y}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S_P \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

ب.  $(\bar{X} - \bar{Y}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

ج.  $(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \cdot S_P \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

د.  $(\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1) \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

نام درس: آمار ریاضی (۲)

رشته تحصیلی/گد درس: آمار و آمار ریاضی (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از ماشین حساب مجاز است. منبع: --

۸. با تعبیر  $P(-۲۵/۱ \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -۶/۷) = ۰/۹۵$  این است که در سطح خطای ۵ درصد می توان ادعا کرد که

الف.  $\mu_1 = \mu_2$  ب.  $\mu_1 < \mu_2$  ج.  $\mu_1 > \mu_2$  د. اطلاعات کافی نمی باشد.

۹. اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه ای تصادفی از تابع چگالی  $f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}$   $x \geq \theta$  باشد کمیت محوری بر اساس کدام آماره است؟

الف.  $Y_n = \max X_i$  ب.  $Y_1 = \min X_i$   
ج.  $\frac{Y_1 + Y_n}{2}$  د.  $\frac{Y_n - Y_1}{2}$

۱۰. در فاصله اطمینان به روش آماری  $\int_{-\infty}^{h_1(\theta)} f_T(t) dt = P_1$  ,  $\int_{h_2(\theta)}^{\infty} f_T(t) dt = P_2$  کدام گزاره درست است؟

الف.  $0 < P_1 + P_2 < 1$  ب.  $0 < P_1 - P_2 < 1$   
ج.  $\frac{P_1 + P_2}{2} < 1$  د.  $0 < P_1 + P_2 < \frac{1}{2}$

۱۱. ناحیه بحرانی پرتوانترین آزمون برای آزمون  $0 < x < 1$  ;  $f(x) = 6x^5$  ;  $H_0: X \sim f(x)$  در مقابل

$H_1: g(x) = 3x^2$  ;  $0 < x < 1$  با احتمال خطای نوع اول  $\alpha = \frac{1}{64}$  کدام است؟

الف.  $x > \frac{1}{2}$  ب.  $x > \frac{1}{8}$  ج.  $x < \frac{1}{4}$  د.  $x < \frac{1}{2}$

۱۲. می خواهیم از نمونه ای به اندازه  $n$  از جامعه نرمالی با  $\sigma^2 = 1$  استفاده کرده و فرض صفر  $H_0: \mu = \mu_0$  را برابر فرض مقابل  $H_1: \mu = \mu_1$  که در آن  $\mu_1 > \mu_0$  آزمون کنیم از لم نیمن پیرسن، تواناترین آزمون به اندازه  $\alpha$  کدام است؟

الف.  $\bar{X} \geq \mu_0 + Z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ب.  $\bar{X} \leq \mu_0 + Z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ج.  $\sum_{i=1}^n X_i \leq \mu_0 + Z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$

د.  $\sum_{i=1}^n X_i > \mu_0 - Z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$

نام درس: آمار ریاضی (۲)

رشته تحصیلی/گروه درس: آمار و آمار ریاضی (۱۱۱۷۰۳۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از ماشین حساب مجاز است. منع: --

۱۳. فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال

$x$	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

باشد برای آزمون فرض

$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ r & x = 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$  مقدار  $r$  کدام

اگر توانستین آزمون به اندازه  $\alpha = \frac{1}{2}$  داری تابع بحرانی  $H_0: \theta = \frac{1}{2}$  و  $H_1: \theta = \frac{1}{4}$  است؟

الف.  $\frac{1}{4}$  ب.  $\frac{1}{2}$  ج.  $\frac{1}{3}$  د.  $\frac{1}{5}$

۱۴. فرض کنید در آزمون  $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta = \theta_1 \end{cases}$  ،  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون باشند کدام گزینه همواره صحیح است؟

الف.  $\alpha + \beta = 1$  ب.  $\alpha < \beta$  ج.  $\alpha \geq \beta$  د.  $\gamma + \beta = 1$

۱۵. در توزیع دوجمله ای  $X \sim bin(4, p)$  برای آزمون  $\begin{cases} H_0: P = 0.3 \\ H_1: P = 0.2 \end{cases}$  ناحیه بحرانی به شکل  $C = \{0, 1\}$ ، توان آزمون کدام است؟

الف.  $0.8192$  ب.  $0.3483$  ج.  $0.6517$  د.  $0.1194$

۱۶. خانواده توزیعهای کوشی با پارامتر مکانی  $\theta$  در کدام آماره دارای خاصیت  $MLR$  می باشد؟

الف.  $\bar{X}$  ب.  $\sum_{i=1}^n X_i$

ج.  $\frac{1}{\bar{X}}$  د. توزیع کوشی دارای خاصیت  $MLR$  نمی باشد.

۱۷. کدام گزینه در مورد آزمون نسبت احتمال دنباله ای صحیح است؟

الف. حجم نمونه این آزمون همواره ثابت است.

ب. این آزمون همواره به مشاهدات بیشتری نیاز دارد.

ج. این آزمون، همواره بهترین آزمون است.

د. حجم نمونه در این آزمون یک متغیر تصادفی است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: آمار ریاضی (۲)  
رشته تحصیلی/گد درس: آمار و آمار ریاضی (۱۱۱۷۰۳۳)

گد سری سؤال: یک (۱) استفاده از ماشین حساب مجاز است. منبع: --

۱۸. آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته لزماً به چه آماره‌ای بستگی دارد؟

الف. بسنده ب. بسنده کامل ج. درستنمایی ماکزیم د. بسنده مینیمال

۱۹. اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از  $N(\mu, 1)$  باشد، برای بررسی کدام جفت از فرض‌های زیر پرتوانترین آزمون وجود ندارد؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف.} & \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu = \mu_1 \end{cases} \\ \text{ب.} & \begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu > 0 \end{cases} \\ \text{ج.} & \begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu < 0 \end{cases} \\ \text{د.} & \begin{cases} H_0: \mu = 0 \\ H_1: \mu \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

۲۰. در مدل خطی  $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$  و  $var(Y_i) = \sigma^2$  با برآوردهای  $\hat{\sigma}^2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$  کدام گزینه صحیح است؟

الف. آماره‌های بسنده کامل توأم می‌باشند.  
ب. برآوردهای ناریب پارامترهای متناظرشان می‌باشند.  
ج.  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  وابسته به  $\hat{\sigma}^2$  می‌باشند.  
د.  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  دارای توزیع نرمال دو متغیره می‌باشند.

سوالات تشریحی

۱. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد یک بازه اطمینان برای  $\sigma^2$  وقتی که  $\mu$  مجهول است بیابید. (۱/۵ نمره)

۲. نمونه‌گیری از توزیع برنولی با پارامتر  $\theta$  را در نظر بگیرید. یک بازه اطمینان بزرگ نمونه‌ای  $100\%$  درصد برای  $\theta$  بیابید. (۱/۵ نمره)

۳. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0, \theta)}(x)$  باشد که در آن  $\theta > 0$  پرتوانترین آزمون برای  $\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$  به اندازه  $\alpha$  را بیابید. (۱/۵ نمره)

۴. در مدل خطی،  $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ ،  $var(Y_i) = \sigma^2$ ؛  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $n$  متغیر تصادفی توأماً مستقل و  $Y_i$  ها متغیر تصادفی نرمال است. برآورد نقطه‌ای پارامترها را بیابید. (۱/۵ نمره)

۵. مفاهیم ذیل را تعریف کنید. (۲ نمره)

الف. آزمون تصادفی

ب. ناحیه بحرانی

ج. کمیت محوری

د. پرتوانترین آزمون بطور یکنواخت