

کد کنترل

271

E

271E



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه

۹۸/۱۲/۹

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۹

رشته ریاضی - کد (۲۲۳۳)

* تذکر مهم: دقت لازم در پاسخ به مواد امتحانی، رشته و زمینه‌های مورد نظر به عمل آید.

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

عنوان مواد امتحانی

دروس کارشناسی ارشد				دروس کارشناسی							زمینه	گرایش	رشته
اصول آموزش ریاضی	پهینه‌سازی خطی ۱	جبر پیشرفته ۱	آنالیز حقیقی ۱	مبانی احتمال	توپولوژی	مبانی جبر	مبانی آنالیز عددی	مبانی آنالیز ریاضی	مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی	مبانی علوم ریاضی			
-	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	✓	محض	-	ریاضی
-	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	کاربردی	-	-
✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	-	-	آموزش ریاضی*

- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه محض می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی جبر، توپولوژی، آنالیز حقیقی ۱ و جبر پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه کاربردی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و پهینه‌سازی خطی ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه آموزش ریاضی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و اصول آموزش ریاضی) پاسخ دهند.

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۹

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۱- گزاره «تابع $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است» را در نظر بگیرید.

کدام گزینه نقیض گزاره فوق نیست؟ (در اینجا $\nexists x \in X$ به مفهوم آن است که هیچ x ای در X وجود ندارد).

$$(1) (\exists x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)) \vee (\exists y \in Y \nexists x \in X (f(x) = y))$$

$$(2) (\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))) \Rightarrow (\exists y \in Y \nexists x \in X (f(x) = y))$$

$$(3) (\exists x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2))) \vee (\exists y \in Y \forall x (x \in X \Rightarrow f(x) \neq y))$$

$$(4) (\forall x_1, x_2 \in X (x_1 = x_2 \vee f(x_1) \neq f(x_2))) \vee (\exists y \in Y \forall x \in X (f(x) \neq y))$$

۲- اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟ (Δ تفاضل متقارن است)

$$(1) \text{ اگر } A, B \subseteq Y \text{ آنگاه } f^{-1}(A \Delta B) \subseteq f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$$

$$(2) \text{ اگر } A, B \subseteq X \text{ آنگاه } f(A \Delta B) \subseteq f(A) \Delta f(B)$$

$$(3) \text{ اگر } A, B \subseteq Y \text{ آنگاه } f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \Delta B)$$

$$(4) \text{ اگر } A, B \subseteq X \text{ آنگاه } f(A) \Delta f(B) \subseteq f(A \Delta B)$$

۳- فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه ناتهی X باشد به گونه‌ای که $R \cup R^{-1} = X^2$. سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را در نظر می‌گیریم. رابطه R ضرورتاً چند تا از این خاصیت‌ها را دارد؟

$$(1) 0$$

$$(2) 1$$

$$(3) 2$$

$$(4) 3$$

۴- رابطه هم ارزی \equiv را بین زیر مجموعه‌های \mathbb{N} با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم. $A \equiv B$ یعنی تفاضل متقارن $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ مجموعه‌ای متناهی است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مجموعه رده‌های هم ارزی شمارای نامتناهی است.

(۲) رابطه \equiv ترتیب جزئی نیست.

(۳) هر رده هم ارزی شمارای نامتناهی است.

(۴) تمام زیر مجموعه‌های متناهی \mathbb{N} ، در یک رده هم ارزی قرار دارند.

۵- عدد اصلی مجموعه متشکل از توابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ با ویژگی $\forall n \in \mathbb{N} (f(n+1) > f(n) + n)$ ، کدام است؟

(۱) \mathbb{N}_0

(۲) $2^{\mathbb{N}_0}$

(۳) $2^{\mathbb{N}}$

(۴) متناهی است.

مبانی ماتریس ها و جبر خطی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۶- فرض کنید A یک ماتریس 3×10 و B یک ماتریس 10×3 با درایه های حقیقی باشند. اگر ۱، ۲، ۴- مقادیر ویژه ماتریس AB باشند، آنگاه تمامی مقادیر ویژه متمایز BA عبارتند از:

(۱) ۱، ۲، ۴، -۱

(۲) ۱، ۲، ۴، -۱، ۰

(۳) ۱، ۲، ۴، ۰، -۱

(۴) ۱، ۲، ۴، -۱، ۰، -۲

۷- فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ ماتریس قطری شدنی و λ یک مقدار ویژه A با تکرار ۷ باشد. اگر J ماتریسی 10×10 باشد که تمام درایه های آن ۱ است، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) λ یک مقدار ویژه $J + A$ با تکرار حداقل ۷ است.

(۲) λ یک مقدار ویژه $J + A$ با تکرار ۶ است.

(۳) λ یک مقدار ویژه $J + A$ با تکرار حداقل ۶ است.

(۴) λ یک مقدار ویژه $J + A$ با تکرار ۷ است.

۸- فرض کنید A یک ماتریس 2×2 با درایه های حقیقی باشد به طوری که $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 3$. در این صورت

$\text{tr}(A^3)$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۹- فرض کنیم A یک ماتریس مربعی با درایه های صحیح باشد. در این صورت اگر $n \in \mathbb{N}$ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\det(A) \mid n$

(۲) $n \mid \text{tr}(A)$

(۳) $n \mid \text{rank}(A)$

(۴) $n \mid \det(A)$

۱۰- اگر $P_n(\mathbb{R})$ فضای برداری چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n روی میدان اعداد حقیقی باشد و

$T: P_r(\mathbb{R}) \rightarrow P_r(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(f(x)) = x^r f(x) + x f'(x)$ و a رتبه T و b پوچی T باشند، آنگاه داریم:

$$(۱) \quad b = ۳, a = ۰$$

$$(۲) \quad b = ۲, a = ۱$$

$$(۳) \quad b = ۰, a = ۳$$

$$(۴) \quad b = ۱, a = ۲$$

مبانی آنالیز ریاضی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۱۱- مجموعه نقاط حدی $\left\{ \frac{n+m}{2n+m+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ کدام است؟

$$(۱) \quad \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$(۲) \quad \{1\} \cup \left\{ \frac{m}{m+1} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(۳) \quad \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$(۴) \quad \{1\} \cup \left\{ \frac{m}{m+1} : m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

۱۲- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر ریمان باشد به طوری که $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. اگر D مجموعه

نقاط پیوستگی تابع f و $Z(f)$ مجموعه صفرهای تابع f باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$(۱) \quad Z(f) \subseteq D$$

$$(۲) \quad D \subseteq Z(f)$$

(۳) D شمارا است.

(۴) $Z(f)$ شمارا است.

۱۳- فرض کنید $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یکنواخت پیوسته باشد و تابع $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = g(x) \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

(۱) یکنواخت پیوسته و کراندار است.

(۲) لزوماً کراندار و یکنواخت پیوسته نیست.

(۳) یکنواخت پیوسته است ولی لزوماً کراندار نیست.

(۴) کراندار است ولی لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.

۱۴- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد که به ازای هر $x \in (0, 1)$ ، $f'(x)$ موجود است و

$$|f'(x)| \leq 1. \quad \text{درباره مجموعه } A = \{x \in [0, 1] : f(x) = x\} \text{ کدام گزینه درست است؟}$$

(۱) همبند است ولی لزوماً فشرده نیست.

(۲) فشرده است ولی لزوماً همبند نیست.

(۳) لزوماً فشرده یا همبند نیست.

(۴) فشرده و همبند است.

۱۵- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} n^{(n-1)!} \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^{n!}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) ∞

مبانی آنالیز عددی (کاربردی و آموزش ریاضی):

۱۶- دستگاه ممیز شناور نرمال شده را با نمایش عدد حقیقی ناصفر به صورت $\pm(d_1 d_2 d_3 d_4) \times 2^{\pm d_5 d_6}$ در نظر بگیرید که در آن، $d_1 = 1$ یا 0 ، $d_i = 0$ یا 1 به ازای $i = 2, \dots, 6$. فرض کنید که روش بریدن ارقام غیرقابل نمایش به کار می‌رود. اگر نمایش ممیز شناور برای $2+t$ برابر با عدد ۲ باشد، آن گاه مقدار t کدام است؟

(۱) ۰/۵

(۲) ۰/۲۵

(۳) ۰/۱۲۵

(۴) ۰/۳۷۵

۱۷- کدام یک از دنباله‌های زیر، مرتبه همگرایی برابر با ۲ دارد؟

(۱) $\left\{ \frac{1}{e^n} \right\}$

(۲) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$

(۳) $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$

(۴) $\left\{ \frac{1}{2^{2^n}} \right\}$

۱۸- فرض کنید \bar{x} جواب دستگاه $Ax = b$ است که در آن، A ناتکین (وارون پذیر) است. \tilde{x} را یک جواب تقریبی محاسبه شده برای این دستگاه بگیرید و قرار دهید $r = b - A\tilde{x}$ و $e = \bar{x} - \tilde{x}$ در این صورت، داریم:

$\|e\| \geq \dots$

(۱) $\|A^{-1}\| \|r\|$

(۲) $\frac{\|r\|}{\|A\|}$

(۳) $\frac{\|r\|}{\|A^{-1}\|}$

(۴) $\|r\| \|A\|$

۱۹- روش نیوتن را برای حل مسئله $\min_x (x^4 - 8x^2)$ در نظر بگیرید. گزینه صحیح کدام است؟

(۱) روش واگراست.

(۲) همگرایی مجانبی می تواند خطی باشد.

(۳) همگرایی مجانبی از درجه دوم است.

(۴) همگرایی مجانبی به یک مینیمم کننده، خطی و به مینیمم کننده دیگر از درجه دوم است.

۲۰- فرض کنید $\phi_1(x) = \sin 2x$ و $\phi_2(x) = \cos 2x$. تابع درون یاب داده های $(0, 1)$ و $(\frac{\pi}{4}, -1)$ به صورت

$$p(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) \text{ برابر است با } \dots\dots\dots$$

$$(1) -\sin 2x + \cos 2x$$

$$(2) \sin 2x - \cos 2x$$

$$(3) \sin 2x + \cos 2x$$

$$(4) -\sin 2x - \cos 2x$$

مسئله جبر (محض):

۲۱- فرض کنید $|G| = p^2 q$ که در آن p و q دو عدد اول متمایزند. اگر N زیرگروه نرمالی از G از مرتبه q باشد، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

$$(1) Z(G) = N$$

$$(2) G = G'N$$

$$(3) G \text{ غیر آبدی است.}$$

$$(4) G' \text{ دوری است.}$$

۲۲- فرض کنید $G = Q_8 \times S_3$ ، که در آن Q_8 گروه کواترنیون های ۸ عضوی است. در این صورت تعداد اعضای

$$Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \text{ کدام است؟}$$

$$(1) 1$$

$$(2) 2$$

$$(3) 4$$

$$(4) 6$$

۲۳- فرض کنید $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_{p^4}$ ، که در آن p عددی اول است. در این صورت تعداد عضوهای مرتبه p

در G کدام است؟

$$(1) (p^4 - 1)(p^2 - 1)$$

$$(2) p^4 - 1$$

$$(3) 1 + p + p^2 + p^3$$

$$(4) (p - 1)(p^2 - 1)(p^3 + 1)$$

۲۴- حلقه R کدام باشد تا مجموعه $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ به همراه اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها، یک میدان باشد؟

(۱) \mathbb{C} (۲) \mathbb{Z}_5 (۳) $\mathbb{Z}[i]$ (۴) \mathbb{Z}_v

۲۵- فرض کنید $F = \{0, 1, a, b\}$ یک میدان چهار عضوی باشد. در این صورت $1 + a^3$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) a

(۳) ۱

(۴) b

توپولوژی (محض):

۲۶- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و A و B در X چگال باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $A \neq B$ آنگاه $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ در X چگال است.(۲) اگر A باز باشد آنگاه $A \cap B$ در X چگال است.(۳) اگر $A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $A \cap B$ در A چگال است.(۴) $A^\circ \cup B^\circ$ در X چگال است، که در آن A° ، درون A است.

۲۷- فرض کنید (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متریک و تابع $f: X \rightarrow Y$ یک همسان‌ریختی باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) X کراندار است اگر و تنها اگر Y کراندار باشد.(۲) دنباله $\{x_n\}$ در X کوشی است اگر و تنها اگر دنباله $\{f(x_n)\}$ در Y کوشی باشد.(۳) تابع $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است اگر و تنها اگر gof یکنواخت پیوسته باشد.(۴) هر نقطه $x \in X$ یک نقطه حدی X است اگر و تنها اگر هر نقطه $y \in Y$ یک نقطه حدی Y باشد.

۲۸- فضای توپولوژیک (X, τ) را نرمال گوییم، هرگاه هر مجموعه تک عضوی در X بسته باشد و برای هر دو مجموعه

بسته مجزای A و B در X ، دو مجموعه باز مجزا شامل A و B موجود باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) هر فضای متریک، نرمال است.

(۲) هر فضای نرمال، هاوسدورف است.

(۳) هر فضای فشرده و هاوسدورف، نرمال است.

(۴) حاصل ضرب دکارتی دو فضای نرمال، نرمال است.

۲۹- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک شمارای دوم باشد و $A \neq X$ زیر مجموعه ناشمارای X است. کدام

گزینه در مورد A با توپولوژی القایی (نسبی) نادرست است؟

(۱) گسسته است.

(۲) تعداد ناشمارا نقطه حدی دارد.

(۳) شمارای دوم است.

(۴) جدایی‌پذیر است.

۳۰- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک است و $A \subseteq X$. اگر A' مجموعه نقاط حدی A و \bar{A} بستار A باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر نقطه $x \in X$ حد دنباله‌ای از اعضای A باشد آنگاه $x \in \bar{A}$.
- (۲) اگر نقطه $x \in X$ حد دنباله‌ای از اعضای متمایز A باشد آنگاه $x \in A'$.
- (۳) اگر $x \in \bar{A}$ ، آنگاه دنباله‌ای در A وجود دارد که به x همگراست.
- (۴) اگر $x \in A'$ ، آنگاه هر مجموعه باز شامل x ، مجموعه A را قطع می‌کند.

مبانی احتمال (کاربردی و آموزش ریاضی):

۳۱- در یک دانشکده که دروس به صورت ۲، ۳ و ۴ واحدی ارائه می‌گردد، معدل ترم یک دانشجوی که ۱۲ واحد داشته برابر ۱۵ شده است. اگر نمره یک درس ۴ واحدی این دانشجو به جای ۱۴ به اشتباه ۱۶ وارد شده باشد، معدل این دانشجو پس از اصلاح کدام است؟

- (۱) $14/13$
- (۲) $14/23$
- (۳) $14/5$
- (۴) $14/75$

۳۲- هر خانه صفحه شطرنج را می‌توان با زوج مرتب (i, j) که در آن $i, j = 1, 2, \dots, 8$ مشخص کرد. دو خانه (i_1, j_1) و (i_2, j_2) از صفحه شطرنج را همسایه گوییم هرگاه $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$. اگر دو خانه به تصادف از صفحه شطرنج انتخاب شوند، احتمال این که دو خانه همسایه باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{56}{\binom{64}{2}}$
- (۲) $\frac{64}{\binom{64}{2}}$
- (۳) $\frac{112}{\binom{64}{2}}$
- (۴) $\frac{224}{\binom{64}{2}}$

۳۳- ظرفی شامل دوازده کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۲ است. اگر از این ظرف، ده کارت به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب شود، احتمال آنکه مجموع ده کارت انتخابی ۶۵ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{11}$
 (۲) $\frac{3}{12}$
 (۳) $\frac{4}{12}$
 (۴) $\frac{1}{11}$

۳۴- مربع $OABC$ به رئوس مقابل $(0,0)$ و (a,a) ، $a > 0$ را در نظر بگیرید. یک نقطه به تصادف از داخل این مربع انتخاب می‌شود. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی از قطر AC کمتر از $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

۳۵- کیسه شماره ۱ دارای یک مهره سفید و دو مهره سیاه، کیسه شماره ۲ دارای دو مهره سفید و یک مهره سیاه و کیسه شماره ۳ دارای سه مهره سفید و سه مهره سیاه است. یک تاس پرتاب می‌شود. اگر نتیجه پرتاب یکی از اعداد ۱، ۲ یا ۳ باشد کیسه ۱، اگر نتیجه پرتاب ۴ باشد کیسه ۲ و اگر نتیجه پرتاب ۵ یا ۶ باشد کیسه ۳ انتخاب می‌شود. از کیسه انتخاب شده مهره‌ای به تصادف استخراج می‌شود. اگر مهره انتخاب شده سفید باشد، احتمال انتخاب کیسه ۲ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{1}{9}$
 (۴) $\frac{4}{9}$

آنالیز حقیقی ۱ (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۳۶- کدام گزینه درست است؟

(۱) اجتماع تعداد متناهی سیگما جبر، سیگما جبر است.

(۲) سیگما جبری وجود دارد که شمارای نامتناهی است.

(۳) اگر \mathcal{F} یک سیگما جبر روی X و $T: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد، آنگاه $G = \{T(A) : A \in \mathcal{F}\}$ یک سیگما جبر روی Y است.(۴) اگر \mathcal{F} یک سیگما جبر روی X و $T: Y \rightarrow X$ یک تابع باشد، آنگاه $G = \{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ یک سیگما جبر روی Y است.۳۷- فرض کنید E زیر مجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر از بازه بسته $[0, 1]$ باشد. کدام گزینه درست است؟(۱) مجموعه $E \cap \mathbb{Q}^c$ اندازه‌پذیر است.(۲) مجموعه $E + \mathbb{N} = \{e + n : e \in E, n \in \mathbb{N}\}$ اندازه‌پذیر است.(۳) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد آنگاه مجموعه $f(E \cap \mathbb{Q})$ اندازه‌پذیر است.(۴) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یک به یک و پوشا باشد آنگاه مجموعه $f(E)$ اندازه‌ناپذیر است.۳۸- فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر و m اندازه لبگ روی \mathbb{R} باشد. کدام گزینه درست است؟(۱) اگر A ناشمارا باشد آنگاه $m(A) > 0$.(۲) اگر $m(A) > 0$ آنگاه درون A ناتهی است.(۳) اگر $m(A) = 0$ آنگاه $m(A^c) = 0$ که در آن $A^c = \{a^c : a \in A\}$.(۴) $m(A + B) = m(A) + m(B)$ که در آن $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.۳۹- فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر و m اندازه لبگ روی \mathbb{R} است. کدام گزینه نادرست است؟(۱) هر تابع کراندار اندازه‌پذیر $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ با تابع ساده‌ای مانند $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ تقریباً همه‌جا برابر است.(۲) هر تابع ساده اندازه‌پذیر $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ با تابعی کراندار مانند $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ تقریباً همه‌جا برابر است.(۳) هر تابع کراندار اندازه‌پذیر $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ عضو $L^1(m)$ است اگر و تنها اگر $m(A) < +\infty$.(۴) هر تابع ساده اندازه‌پذیر $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ عضو $L^1(m)$ است اگر و تنها اگر $m(A) < +\infty$.۴۰- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و f بر X انتگرال‌پذیر لبگ باشد و $E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. کدام

گزینه درست است؟

(۱) $\mu(E) = 0$ (۲) E یک مجموعه σ -متناهی است.(۳) $\mu(E) = \infty$ (۴) $0 < \mu(E) < \infty$

۴۱- فرض کنید A زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر و کراندار از اعداد حقیقی و m اندازه لبگ بر A باشد. به علاوه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و نامنفی بر A باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n $\int_A f_n^2 dm \leq 4n$. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2}$ تقریباً همه‌جا بر A همگرا است.

(۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ تقریباً همه‌جا بر A همگرا است.

(۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f_n}{n^2}$ تقریباً همه‌جا به طور مشروط بر A همگرا است.

(۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f_n}{n^2}$ فقط روی زیر مجموعه‌های فشرده A تقریباً همه‌جا همگرا است.

۴۲- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نامنفی در یک فضای اندازه (X, m, μ) باشد و $f_n \rightarrow f$ (a.e.) که f نیز تابع انتگرال‌پذیر است. کدام گزینه درست است؟

(۱) $\liminf \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ (۲) $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

(۳) $\limsup \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ (۴) $\int_X f_n d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

۴۳- در فضای اندازه (X, m, μ) کدام یک از گزینه‌ها نادرست است؟

(۱) اگر $1 < p < \infty$ آنگاه $L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p$

(۲) اگر $1 \leq p < q \leq \infty$ آنگاه $L^q \subseteq L^p$

(۳) اگر $1 \leq p < r < q < \infty$ آنگاه $L^p \cap L^q \subseteq L^r$

(۴) $L^1 \cap L^2$ با نرم $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ یک فضای کامل است.

۴۴- فرض کنید $X = [a, b]$ ، $A = C(X)$ (توابع پیوسته بر X)، $B = C^1(X)$ (توابع با مشتق پیوسته بر X) و $C = P(X)$ (توابع چندجمله‌ای بر X). کدام گزینه درست است؟

(۱) A و B و C در $L^2(X)$ چگال هستند.

(۲) A در $L^2(X)$ چگال است ولی B و C نیستند.

(۳) A و B در $L^2(X)$ چگال هستند ولی C نیست.

(۴) هیچ کدام از سه مجموعه A و B و C در $L^2(X)$ چگال نیستند.

۴۵- فرض کنید C_{∞} فضای تمام دنباله‌هایی از اعداد حقیقی است که به جز تعداد متناهی بقیه جملات آن‌ها صفر هستند.

تابع $f: C_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x_k$ ($x = \{x_k\} \in C_{\infty}$) و نرم‌های $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_{\infty}$ را بر C_{∞} با

ضابطه‌های C_{∞} $x = \{x_k\} \in C_{\infty}$ $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ و $\|x\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه

درست است؟

- (۱) تابع f با هر دو نرم پیوسته است.
- (۲) تابع f با هیچ کدام از دو نرم پیوسته نیست.
- (۳) تابع f با نرم $\|\cdot\|_{\infty}$ پیوسته ولی با نرم $\|\cdot\|_2$ ناپیوسته است.
- (۴) تابع f با نرم $\|\cdot\|_{\infty}$ ناپیوسته و با نرم $\|\cdot\|_2$ پیوسته است.

جبر پیشرفته ۱ (محض):

۴۶- رادیکال جیکوبسن حلقه \mathbb{Z}_{22} کدام است؟

- (۱) $\{0, 6, 12, 18\}$
- (۲) $\{0, 2, 4, 6, \dots, 22\}$
- (۳) $\{0, 3, 6, 9, \dots, 21\}$
- (۴) $\{0, 5, 10, 15, 20\}$

۴۷- کدام گزینه در مورد \mathbb{Z} مدول $\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{200}$ صحیح است؟

- (۱) هم انژکتو است و هم متناهی مولد.
 - (۲) انژکتو نیست ولی متناهی مولد است.
 - (۳) نه انژکتو است و نه متناهی مولد.
 - (۴) انژکتو است ولی متناهی مولد نیست.
- ۴۸- کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد جمع و ضرب مدول‌ها صحیح است؟

- (۱) هر جمعونند یک مدول آزاد، آزاد است.
- (۲) هر جمعونند یک مدول آزاد، تصویری است.
- (۳) هر حاصل جمع از مدول‌های انژکتو، انژکتو است.
- (۴) هر حاصل ضرب از مدول‌های تصویری، تصویری است.

۴۹- کدام یک از \mathbb{Z} -مدول‌های زیر ناصفر است؟

- (۱) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}\right)$
- (۲) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$
- (۳) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\prod_{n \geq 2} \mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}\right)$
- (۴) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}_{1398}, \prod_{n \geq 2} \mathbb{Q}\right)$

۵۰- اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و $a \in J(R)$ $a \neq 0$ آن‌گاه کدام گزینه در مورد تابع $\phi: R \rightarrow R$ که برای هر

$\phi(r) = ar$ ، $r \in R$ صحیح است؟

- (۱) یک R -بروریختی است ولی همریختی حلقه‌ای نیست.
- (۲) یک R -بروریختی است و یک همریختی حلقه‌ای هم است.
- (۳) یک R -بروریختی نیست ولی همریختی حلقه‌ای است.
- (۴) نه یک R -بروریختی است و نه یک همریختی حلقه‌ای است.

۵۱- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار و I ایده‌آلی در R و $f: \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{I}$ یک هم‌ریختی R -مدولی باشد. در

این صورت کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) اگر f یک به یک باشد، حتماً پوشاست.
 (۲) f حتماً پوشاست.
 (۳) f حتماً یک به یک است.
 (۴) اگر f پوشا باشد حتماً یک به یک است.

۵۲- اگر \mathbb{Z}_7 را به صورت طبیعی به عنوان \mathbb{Z}_{14} -مدول در نظر بگیریم، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) \mathbb{Z}_7 هم پروژکتیو است و هم انژکتیو.
 (۲) \mathbb{Z}_7 پروژکتیو نیست ولی انژکتیو است.
 (۳) \mathbb{Z}_7 پروژکتیو است ولی انژکتیو نیست.
 (۴) \mathbb{Z}_7 نه پروژکتیو است نه انژکتیو.

۵۳- فرض کنید $R = \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2 \rangle}$ و $S = \frac{\mathbb{Q}[x, y]}{\langle x + y \rangle}$ در این صورت:

- (۱) R و S آرئینی هستند.
 (۲) R غیرآرئینی و S آرئینی است.
 (۳) R آرئینی و S غیرآرئینی است.
 (۴) R و S غیرآرئینی هستند.

۵۴- فرض کنید $\circ \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \circ$ دنباله‌ای دقیق از \mathbb{Z} -مدول‌ها باشد. حداکثر چند انتخاب برای G وجود دارد که دو به دو غیر یکرخت باشند؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۵۵- فرض کنید I یک ایده‌آل راست سره و غیر صفر در حلقه $M_7(\mathbb{R})$ باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر لزوماً درست نیست؟

- (۱) I یک ایده‌آل راست مینیمال است.
 (۲) I یک ایده‌آل راست پوچ‌توان است.
 (۳) I یک ایده‌آل راست اصلی است.
 (۴) I یک ایده‌آل راست ماکسیمال است.

بهینه‌سازی خطی ۱ (کاربردی):

۵۶- فرض کنید جدول بهینه الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است. شرایط برای این که مجموعه جواب‌های بهینه کران‌دار نباشد، کدام است؟

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	۱	۰	α	۰	۰	β	γ	u
x_1	۰	۱	-۱	۰	۰	۰	۱	u_1
x_3	۰	۰	۱	۱	۰	-۱	۰	u_2
x_4	۰	۰	۱	۰	۱	-۲	-۱	u_3

$$(۲) \beta = 0, \alpha, \gamma \leq 0$$

$$(۴) \beta > 0, \alpha, \gamma \leq 0$$

$$(۱) \gamma = 0, \alpha, \beta \leq 0$$

$$(۳) \alpha = 0, \beta, \gamma \leq 0$$

۵۷- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای مرحله (فاز) اول در روش دو مرحله‌ای (دو فازی) برای حل مسئله (p) است. R_i متغیر مصنوعی مربوط به قید $-i$ ام قیود تساوی در مسئله (p) است. مقدار α کدام است؟

$$(p): \min c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	R_3	RHS
z	۱					α			(۱) -۱
x_2	۰					۰			(۲) ۰
R_2	۰					۲			(۳) ۴
R_3	۰					۳			(۴) ۵

۵۸- جدول زیر، جدول نهایی روش $-M$ بزرگ برای حل یک مسئله مینیمم‌سازی استاندارد (p) است. متغیر مصنوعی مربوط به قید $-i$ ام قیود تساوی در مسئله (p) را با R_i نمایش داده‌ایم. مقدار α برابر است با

$$\min c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	RHS
z	۱	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	α
R_1	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۳
x_2	۰	-۲	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱

۵۹- در یک تکرار الگوریتم سیمپلکس با قاعده جلوگیری از دور Lexico (الفبایی)، ستون مربوط به متغیر وارد شونده،

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 12 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 16 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ و وارون ماتریس پایه، } y_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ بردار سمت راست جدول،}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ علاوه بر بردار متغیرهای پایه‌ای به صورت متغیر خارج شونده کدام است؟}$$

$$x_2 \text{ (۲)}$$

$$x_5 \text{ (۴)}$$

$$x_1 \text{ (۱)}$$

$$x_4 \text{ (۳)}$$

۶۰- کدام گزینه درباره الگوریتم سیمپلکس با متغیرهای کراندار برای حل مسئله زیر درست است؟

$$\min c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$\ell \leq x \leq u$$

(۱) الگوریتم هرگز به دور نمی‌افتد.

(۲) الگوریتم جواب بهینه چندگانه را تشخیص نمی‌دهد.

(۳) مقدار تابع هدف در هر تکرار کاهش می‌یابد.

(۴) مقدار برخی مؤلفه‌های جواب‌های پایه‌ای شدنی می‌توانند منفی شوند.

۶۱- اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $m < n$ رتبه (A) ، آن‌گاه گزینه صحیح در مورد مسئله زیر کدام است؟

$$\min z = c^T x$$

s.t. (P)

$$Ax = b$$

(۱) ناشدنی است.

(۲) بی‌نهایت جواب شدنی دارد.

(۳) یا بی‌کران است یا جواب بهینه دارد.

(۴) یا ناشدنی است یا بی‌کران است یا جواب بهینه دارد.

۶۲- فرض کنید که مسئله (P) به صورت:

$$\max w = u^T b$$

s.t. (P)

$$\Lambda^T u = c$$

جواب بهینه دارد. دوگان (D) را بنامید. فرض کنید در مسئله (P)، c_j به ازای برخی j به \bar{c}_j تغییر یابد.

مسئله جدید را (P') و دوگان آن را (D') بنامید. در مورد مسئله (P') کدام گزینه صحیح است؟

(۱) جواب بهینه دارد.

(۲) می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) یا بی‌کران است یا جواب بهینه دارد.

(۴) می‌تواند جواب بهینه داشته باشد یا ناشدنی باشد.

۶۳- مسئله (P) را به صورت

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$(1) \quad x_1 + x_2 \leq 2 \quad (P)$$

$$(2) \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. فرض کنید u_1 و u_2 به ترتیب متغیرهای دوگان مربوط به قیدهای (۱) و

(۲) در (P) هستند. گزینه صحیح کدام است؟

(۱) مسئله (D) ناشدنی است.

(۲) مسئله (D) می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) در هر جواب شدنی برای (D) داریم $u_1 \leq 0$.

(۴) در هر جواب شدنی برای (D) داریم $u_1 > 0$.

۶۴- مسئله‌های اولیه (P) و دوگان (D) را به صورت‌های

$$\begin{array}{ll} \min z = c^T x & \max u = b^T y \\ \text{s.t.} & \text{s.t.} \\ (P) \quad Ax = b & (D) \quad A^T y + s = c \\ x \geq 0 & s \geq 0 \end{array}$$

و مجموعه‌های F و F^+ را به صورت‌های

$$F = \{(x, y, s) | Ax = b, A^T y + s = c, x \geq 0, s \geq 0\}$$

$$F^+ = \{(x, y, s) | Ax = b, A^T y + s = c, x > 0, s > 0\}$$

در نظر بگیرید. اگر x و (y, s) به ترتیب برای (P) و (D) نقاط بهینه باشند، آنگاه

$$(x, y, s) \in F \cap F^+ \quad (۲) \quad (x, y, s) \notin F^+ \quad (۱)$$

$$(x, y, s) \notin F \cup F^+ \quad (۴) \quad (x, y, s) \notin F \quad (۳)$$

۶۵- مسئله اولیه (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن، درایه‌های b همگی اعدادی مثبت و درایه‌های c همگی اعدادی منفی هستند. گزینه صحیح برای جواب بهینه (P) کدام است؟ (فرض کنید x^* ، در صورت وجود، جواب بهینه برای (P) است.)

$$\begin{array}{ll} \max z = c^T x & \\ \text{s.t.} & (P) \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

$$x^* = 0 \quad (۱)$$

$$(P) \text{ می‌تواند ناشدنی باشد.} \quad (۲)$$

$$(P) \text{ می‌تواند بی‌کران باشد.} \quad (۳)$$

$$x^* \text{ می‌تواند برخی درایه‌های مثبت داشته باشد و } c^T x^* < 0. \quad (۴)$$

اصول آموزش ریاضی (آموزش ریاضی):

۶۶- دو نیاز اساسی که فلیکس کلاین، برای ایجاد رشته «آموزش ریاضی» به عنوان یک رشته مستقل دانشگاهی اعلام کرد، چه بودند؟

(۱) پیشبرد علم ریاضی و تربیت نخبگان ریاضی

(۲) توسعه ریاضی دانشگاهی و تربیت ریاضی‌دان

(۳) آموزش معلمان ریاضی و تدوین برنامه درسی ریاضی دوره متوسطه

(۴) آموزش معلمان ریاضی برای آموزش عمومی و آموزش استادان ریاضی برای دانشگاه

۶۷- در نهضت «دوران ریاضی جدید»، برنامه‌های درسی ریاضی بر چه اساسی استوار بوده‌اند؟

(۱) نظریه مجموعه‌ها

(۲) ریاضیات اصل موضوعی

(۳) ساختارهای ریاضی به سبک گروه بورباکی

(۴) نظریه مجموعه‌ها، منطق صوری و تابع به عنوان مفهوم هماهنگ‌کننده

- ۶۸- تعریف «سواد ریاضی» چیست؟
 (۱) سواد عددی
 (۲) حل مسئله ریاضی
 (۳) انجام محاسبات ریاضی و اثبات مسئله‌های ریاضی
 (۴) استفاده از ریاضی در حل مسئله‌های دنیای واقعی
- ۶۹- مبدع ریاضیات قومی کدام ریاضیدان و از چه کشوری است؟
 (۱) یوبراتان دی آمبروزیو - برزیل
 (۲) هانس فرودنتال - هلند
 (۳) فلیکس کلاین - آلمان
 (۴) آلن بیشاپ - استرالیا
- ۷۰- منظور از توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی چیست؟
 (۱) به‌روز شدن دانش محتوایی ریاضی
 (۲) به‌روز شدن دانش روشی و دانش محتوایی ریاضی
 (۳) آشنایی با روش‌های جدید تدریس از طریق دوره‌های ضمن خدمت
 (۴) آموزش‌های تعاملی و مشارکتی مبتنی بر تقاضاهای برآمده از تدریس واقعی ریاضی
- ۷۱- نهضت حل مسئله، در مقابل چه نوع برنامه‌ای مطرح شد؟
 (۱) برنامه درسی سودمندی اجتماعی
 (۲) برنامه درسی رجعت به اصول
 (۳) برنامه درسی دوران ریاضی جدید
 (۴) برنامه درسی ریاضی اصل موضوعی
- ۷۲- با مطالعه تاریخ آموزش ریاضی، عامل پُر تکرار اثرگذار بر تغییرات ناگهانی برنامه‌های درسی ریاضی، چه بوده است؟
 (۱) بحران‌های سیاسی
 (۲) تغییرات جمعیتی
 (۳) نتایج ارزیابی‌های بین‌المللی
 (۴) تغییرات اساسی در حوزه ریاضی
- ۷۳- هدف اصلی از «مطالعه بین‌المللی روندهای ریاضی و علوم» چیست؟
 (۱) استفاده از نتایج برای دوباره‌نگری در سیاست‌گذاری‌ها و تصمیم‌گیری‌های کلان برنامه‌های درسی ریاضی و علوم
 (۲) بهبود عملکرد ریاضی و علوم دانش‌آموزان در دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول
 (۳) مقایسه عملکرد دانش‌آموزان کشورهای شرکت‌کننده با یکدیگر
 (۴) بازنگری در برنامه‌های آموزش ریاضی و علوم
- ۷۴- ماهیت نتایج تحقیقات آموزش ریاضی، چیست؟
 (۱) قطعی
 (۲) بعضی قطعی و بعضی نسبی
 (۳) وابسته به زمان و مکان
 (۴) نسبی
- ۷۵- جنبش «آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار» در پاسخ به کدام جنبش تاریخی در برنامه درسی ریاضی بود و در کدام کشور رخ داد؟
 (۱) جنبش ریاضی جدید - آمریکا
 (۲) جنبش رجعت به اصول - آلمان
 (۳) جنبش ریاضی جدید - هلند
 (۴) جنبش رجعت به اصول - فنلاند

