کد کنترل

472

F

472F

آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری ـ سال ۱۴۰۲

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

دفترچهٔ شمارهٔ (۱)

صبح پنج‌شنبه
۱۴۰۱/۱۲/۱۱

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آمار (کد ۲۲۳۲)

زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	مجموعه دروس تخصصی: ـ مبانی آنالیز ریاضی ـ ریاضی عمومی ۱و۲ ـ احتمال ۱و۲ ـ استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب .... با شمارهٔ داوطلبی .... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچهٔ سؤالات و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی ـ ریاضی عمومی ۱و۲ ـ احتمال ۱و۲ ـ استنباط آماری ۱:

۱- هرگاه x عدد حقیقی بر بازهٔ $[0,1]$ باشد، کدام مورد برای عبارت $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)$، درست است؟

۱) برای هر x موجود و برابر صفر است.
۲) در تمام نقاط گویا ۱ و در نقاط گنگ صفر است.
۳) در تمام نقاط گویا ۱ و در نقاط گنگ حد موجود نیست.
۴) در نقاط گنگ صفر و در نقاط گویا حد موجود نیست.

۲- فرض کنید تابع $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ در $x=1$ پیوسته و در شرط $f(xy)=f(x)+f(y)$ به ازای هر $x,y>0$ صادق باشد. $f'(1)$ برای هر $x>0$، کدام است؟

۱) $x+f'(x)$
۲) $\frac{f'(x)}{x}$
۳) $x f'(x)$
۴) $f'(x)$ به ازای هر $x\in\mathbb{N}$

۳- اگر f پیوسته و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=L$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=M$، کدام مورد درست است؟

۱) M و L مشتق تابع f را تضمین نمی‌کنند.
۲) L و M مشتق تابع f را تضمین می‌کنند.
۳) L مشتق تابع f را تضمین نمی‌کند و $M=f'(x)$
۴) $L=f'(x)$ و M مشتق تابع f را تضمین نمی‌کند.

۴- فرض کنید $x>0$ ؛ $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ و $\psi(x)=\frac{d}{dx}\left(\ln\Gamma(x)\right)$. حاصل عبارت $\Delta\psi(x)=\psi(x+1)-\psi(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{x}$
۲) $\frac{1}{x-1}$
۳) $\frac{1}{x+1}$
۴) $\frac{1}{x^2}$

۵- مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\cos(\frac{1}{n})\right)}{\sinh(\frac{1}{n})}$ ، کدام است؟

۱) صفر

۲) $\ln(2)$

۳) 1

۴) $+\infty$

۶- کدام مورد برای $f(x,y)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$، درست است؟

۱) تابع f در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۲) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ موجود نیستند.

۳) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ موجود است ولی $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ موجود نیست.

۴) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ موجود است ولی $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ موجود نیست.

۷- فرض کنید $u=f(r,s,t)$ ، $t=z-x$ ، $s=y-z$ و $r=x-y$. کدام مورد درست است؟

۱) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

۲) $-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

۳) $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

۴) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

۸- مقدار $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-x^3}dx$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{2}$

۲) $\dfrac{\pi}{3}$

۳) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

۴) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$

۹- مقدار متوسط تابع $f(x,y)=e^{-(x^۲+y^۲)}$ بر طوق $۰<a\le\sqrt{x^۲+y^۲}\le b$، کدام است؟

۱) $\dfrac{e^{-a^۲}-e^{-b^۲}}{\pi(b^۲-a^۲)}$

۲) $\dfrac{e^{-a^۲}-e^{-b^۲}}{b^۲-a^۲}$

۳) $\dfrac{e^{-(b^۲+a^۲)}}{b^۲-a^۲}$

۴) $\dfrac{e^{-(b^۲+a^۲)}}{\pi(b^۲-a^۲)}$

۱۰- با توجه به اتحاد $(|x|<۱)\,;\,\sum_{n=۰}^{\infty}x^n=\dfrac{۱}{۱-x}$، $\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{n}{۲^{n-۱}}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) $\dfrac{۷}{۲}$

۴) ۴

۱۱- جعبه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۴ مهره سفید است. از این جعبه ۵ مهره به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌شود. احتمال اینکه حداقل یک مهره قرمز و حداقل یک مهره سفید انتخاب شده باشد، کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱۶}$　۲) $\dfrac{۱۵}{۱۶}$　۳) $\dfrac{۱}{۳۲}$　۴) $\dfrac{۳۱}{۳۲}$

۱۲- از بین ۱۰۰۰ کارت شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۱۰۰۰ یک کارت به‌تصادف انتخاب می‌شود. احتمال اینکه بر ۸ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

۱) ۰/۰۰۸　۲) ۰/۱۲۵　۳) ۰/۸۷۵　۴) ۰/۹۹۲

۱۳- فرض کنید $\{A_n\,,\,n\ge۱\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل تصادفی باشد، به‌طوری‌که $P(A_{n+۱})=\frac{۱}{۲}P(A_n)\,,(n\ge۱)$ و $P(A_۱)=\frac{۱}{۴}$. مقدار $\sum_{n=۱}^{+\infty}P(A_n\cup A_{n+۱})$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۱}{۲۴}$　۲) $\dfrac{۱۵}{۲۴}$　۳) $\dfrac{۱۷}{۲۴}$　۴) $\dfrac{۷}{۱۲}$

۱۴- روی دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱، دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع X، رسم می‌کنیم که در آن $X\sim U(۰,۱)$. دراین‌صورت دایره به شعاع ۱ به دو قسمت تقسیم می‌شود. اگر Y مساحت قسمت بزرگ‌تر باشد، مقدار $P(Y\le\frac{۲\pi}{۳})$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۳}$　۲) $\dfrac{\sqrt{۲}-۱}{۳}$　۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۳}$　۴) $\dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}{۳}$

۱۵- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع مولد احتمال زیر باشد، مقدار $P(X=۲)$، کدام است؟

$$\phi(z)=\frac{۱}{۶}(۱+z+z^۲)(۱+z)$$

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و $E(X^n)=\frac{۲^n}{n+۱}$، $n\geq ۱$ باشد. مقدار $P(-Ln(X)+۲Ln(۲)>۵)$، کدام است؟

۱) $۲e^{-۵}$
۲) $۱-e^{-۵}$
۳) $e^{-۵}$
۴) $۱-۲e^{-۵}$

۱۷- اگر $X_۱$ و $X_۲$ یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیع $U(۰,۱)$ باشد و $Y=\begin{cases} X_۲ & X_۱<X_۲ \\ ۲X_۱ & X_۱>X_۲ \end{cases}$، مقدار $E(Y)$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع $N(۰,۱)$ باشد. همچنین فرض کنید متغیر تصادفی Z مستقل از X با تابع احتمال $P(Z=۰)=P(Z=۱)=\frac{۱}{۲}$ باشد. اگر متغیر تصادفی Y به‌صورت زیر تعریف شود، کدام مورد درست است؟

$$Y=\begin{cases} X & Z=۱ \\ -X & Z=۰ \end{cases}$$

۱) $Var(Y+Z)=۲$
۲) $Corr(Z,Y)=۱$
۳) $Corr(X,Y)=۱$
۴) توزیع Y نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱

۱۹- اگر X، Y، Z متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی بازه $(۰,۲)$ باشند، مقدار $P(X\geq YZ)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۰- فرض کنید (X,Y) دارای توزیع یکنواخت روی ناحیه زیر باشد. مقدار $E(X\mid Y=۰/۲)$، کدام است؟

$$\mathbb{R}=\{(x,y):x>۰,x+|y|<۱\}$$

۱) صفر
۲) ۰٫۲
۳) ۰٫۴
۴) ۰٫۶۴

۲۱- با فرض $E(Y\mid X)=۱$، کدام مورد درست است؟

۱) $Var(XY)>Var(X)$
۲) $Var(XY)=Var(X)$
۳) $Var(XY)\leq Var(X)$
۴) $Var(XY)=Var(X)Var(Y)$

۲۲- فرض کنید X_1 , X_2 , X_3 یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. تابع مولد گشتاور $W = X_1^3 X_2^2 X_3$، کدام است؟

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x=0\\ \frac{2}{3} & x=1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{3t}$

۲) $\frac{1}{27}+\frac{8}{27}e^{3t}$

۳) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{t}\right)^3$

۴) $\frac{19}{27}+\frac{8}{27}e^{t}$

۲۳- فرض کنید $N \sim Bin(10 , 1-e^{-2})$ و X_iها، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و مستقل از N با تابع احتمال زیر باشند. مقدار $P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = 0\right)$، کدام است؟

$$P(X_1=2)=p \quad , \quad P(X_1=0)=q \quad (p+q=1)$$

۱) $\left(q+pe^{-2}\right)^{10}$

۲) $\left(e^{-2}-qe^{-2}\right)^{10}$

۳) $\left(p+e^{-2}q\right)^{10}$

۴) $\left(e^{-2}-pe^{-2}\right)^{10}$

۲۴- فرض کنید $X_1 , \dots , X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد. با فرض $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$، توزیع حدی $Z_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n}Y_n - 1\right)$، کدام است؟

۱) نمایی با میانگین ۱

۲) نرمال استاندارد

۳) کای‌دو با ۱ درجه آزادی

۴) تباهیده در نقطه صفر

۲۵- فرض کنید $X_1 , X_2 , \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع یکسان نمایی با میانگین $\frac{1}{2}$ باشند و برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف کنید $Y_n = \min\{k \geq 1 : X_k > n\}$. مقدار $\lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \leq E(Y_n)\right)$، کدام است؟

۱) e^{-1}

۲) $1-e^{-2}$

۳) e^{-2}

۴) $1-e^{-1}$

۲۶- فرض کنید $Y_1, \dots , Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه $(0 , \theta)$، $\theta > 1$ باشد. اگر مشاهدات ما به‌صورت زیر باشد،

$$X_i=\begin{cases}Y_i & Y_i \geq 1\\ 1 & Y_i < 1\end{cases} \qquad i=1,\dots,n$$

برآوردگر گشتاوری (MME) پارامتر θ برحسب X_iها، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(\bar{X}+\sqrt{\bar{X}^2-1})$

۲) $\bar{X}+\sqrt{\bar{X}^2-1}$

۳) $\frac{1}{2}(\bar{X}-\sqrt{\bar{X}^2-1})$

۴) $\bar{X}-\sqrt{\bar{X}^2-1}$

۲۷- فرض کنید X یک مشاهده از توزیعی با یکی از تابع چگالی احتمال‌های زیر باشد.

$$f(x\mid\theta=2)=\begin{cases}\frac{1}{4}|x|, & |x|<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x\mid\theta=5)=\begin{cases}\frac{3}{16}x^2, & |x|<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) θ، کدام است؟

۱) $\hat{\theta}=\begin{cases}2 & |X|<\frac{4}{3}\\ 5 & |X|>\frac{4}{3}\end{cases}$

۲) $\hat{\theta}=\begin{cases}2 & |X|<\frac{3}{4}\\ 5 & |X|>\frac{3}{4}\end{cases}$

۳) $\hat{\theta}=\begin{cases}2 & |X|>\frac{4}{3}\\ 5 & |X|<\frac{4}{3}\end{cases}$

۴) $\hat{\theta}=\begin{cases}2 & |X|>\frac{3}{4}\\ 5 & |X|<\frac{3}{4}\end{cases}$

۲۸- فرض کنید X یک مشاهده از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x)=\theta e^{-x}+2(1-\theta)e^{-2x}, \quad x>0,\ 0<\theta<1$$

برآورد θ به روش ماکزیمم درست‌نمایی (MLE)، کدام است؟

۱) $\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$

۲) $\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x\ge 2\\ 0 & x<2\end{cases}$

۳) $\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x\le \ln 2\\ 0 & x>\ln 2\end{cases}$

۴) $\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x\ge \ln 2\\ 0 & x<\ln 2\end{cases}$

۲۹- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,1)$ باشد. اگر $i=1,\dots,n$ ، $Y_i=\begin{cases}1 & X_i<0\\ 0 & X_i\ge 0\end{cases}$ و Φ نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد باشد، برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی μ بر پایه Y_iها، کدام است؟

۱) $-\Phi^{-1}(\bar{Y})$

۲) $-\Phi^{-1}(2\bar{Y})$

۳) $\Phi^{-1}(2\bar{Y})$

۴) $\Phi^{-1}(\bar{Y})$

۳۰- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمالی زیر باشند.

$$f_{X_i}(x\mid\theta)=\begin{cases}e^{x+i\theta} & x+i\theta<0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

کدام مورد، برای θ آماره بسنده نیست؟

۱) $\max\left(\frac{X_i}{i}\right)$

۲) $\min\left(-\frac{X_i}{i}\right)$

۳) $\max\left(-\frac{X_i}{i}\right)$

۴) $\left(\frac{X_1}{1},\frac{X_2}{2},\dots,\frac{X_n}{n}\right)$

۳۱- فرض کنید $P_i = \{f_\theta : \theta \in \Theta_i\}$ که در آن f_θ تابع چگالی احتمال و Θ فضای پارامتر است. اگر T یک آماره و $\Theta_1 \subset \Theta_2$ باشند، کدام مورد درست است؟

۱) اگر T در P_1 بسنده باشد آنگاه در P_2 نیز بسنده است.

۲) اگر T در P_2 بسنده کامل باشد آنگاه در P_1 نیز بسنده کامل است.

۳) اگر خانوادهٔ چگالی احتمال در P_1 کامل کراندار باشد، آنگاه کامل است.

۴) اگر T در P_1 بسنده مینیمال و در P_2 نیز بسنده باشد آنگاه در P_2 نیز بسنده مینیمال است.

۳۲- فرض کنید X دارای توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. کدام مورد، درست است؟

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{n}{|x|}\theta^{|x|}(1-\theta)^{n-|x|} & x = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \\ (1-\theta)^n & x = 0 \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

۱) خانواده توزیع‌های $\{f_\theta(x) : \theta \in (0,1)\}$ کامل است.

۲) خانواده توزیع‌های $\{f_\theta(x) : \theta \in (0,1)\}$ کامل نیست.

۳) خانواده توزیع‌های $\{f_\theta(x) : \theta \in (0,1)\}$ بسندهٔ کامل است.

۴) خانواده توزیع‌های $\{f_\theta(x) : \theta \in (0,1)\}$ بسندهٔ مینیمال است.

۳۳- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \theta\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\theta+1} \quad x > 0, \theta > 0$$

برآوردگر نااُریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر θ، کدام است؟

۱) $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i+1)}$

۲) $\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i+1}$

۳) $\dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i+1)}$

۴) $-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i+1}\right)$

۳۴- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسن با پارامتر λ باشد، UMVUE پارامتر $e^{a\lambda}$، کدام است؟ ($a > 0$ معلوم است.)

۱) $\left(\dfrac{a+n}{n}\right)^{\Sigma X_i}$

۲) $\left(\dfrac{a}{a+n}\right)^{\Sigma X_i}$

۳) $\left(\dfrac{n}{a+n}\right)^{\Sigma X_i}$

۴) $\left(\dfrac{a+n}{a}\right)^{\Sigma X_i}$

۳۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{\theta x^{\theta-1}}{(x+1)^{\theta+1}} \quad x>0, \theta>0$$

برآوردگر نااُریب با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) برای $\frac{1}{\theta}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{1+X_i}\right)$

۲) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$

۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{1+X_i}$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\ln\left(\frac{X_i}{1+X_i}\right)$

۳۶- فرض کنید $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(y) = \frac{\theta}{y^2} e^{-\frac{\theta}{y}}, \quad y>0, \theta>0$$

UMVUE پارامتر θ، کدام است؟

۱) $\frac{n-1}{\sum_i Y_i^{-1}}$

۲) $\frac{n-1}{\sum_i Y_i}$

۳) $\frac{1}{n-1}\sum_i Y_i$

۴) $\frac{1}{n-1}\sum_i Y_i^{-1}$

۳۷- فرض کنید T برآوردگر نااُریب با کمترین واریانس (UMVUE) برای θ باشد. اگر U یک «برآوردگر نااُریب صفر» و k یک عدد صحیح مثبت باشد، مقدار $\rho_{T^k, U}$ (ضریب همبستگی خطی (U, T^k))، کدام است؟

۱) 0

۲) همیشه مثبت است.

۳) همیشه منفی است.

۴) بستگی به مقدار k دارد.

۳۸- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ و θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β باشد. برآوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان $L(\theta, \delta) = e^{\theta-\delta} - (\theta-\delta) - 1$، کدام است؟

۱) $\frac{\alpha}{\bar{X}+\beta}$

۲) $\frac{\alpha + \sum X_i}{n + \frac{1}{\beta}}$

۳) $\frac{\bar{X}+\beta}{\alpha}$

۴) $-(n+\alpha)\ln\left(1 - \frac{1}{\sum X_i + \frac{1}{\beta}}\right)$

۳۹- فرض کنید $X \sim N(\theta, 1)$ و θ دارای توزیع یکنواخت روی مجموعه $\{-1, 1\}$ باشد. برآوردگر بیز θ تحت تابع زیان درجه ۲ (SEL) کدام است؟

۱) $\dfrac{e^{-X} - e^{X}}{e^{-X} + e^{X}}$

۲) $\dfrac{e^{X} - e^{-X}}{e^{X} + e^{-X}}$

۳) $\dfrac{e^{-X}}{e^{X} + e^{-X}}$

۴) $\dfrac{e^{X}}{e^{X} + e^{-X}}$

۴۰- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0, \theta)$ و $\frac{1}{\theta}$ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β باشد. برآوردگر بیز پارامتر θ^2 تحت تابع زیان $L(\theta, \delta) = \theta(\theta - \delta)^2$ کدام است؟

۱) $\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{2}{\beta})^2}{(n + 2\alpha - 4)(n + 2\alpha - 2)}$

۲) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{2}{\beta}}{n + 2\alpha - 2}$

۳) $\dfrac{(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{2}{\beta})^2}{(n + 2\alpha - 4)(n + 2\alpha - 6)}$

۴) $\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{2}{\beta}}{n + 2\alpha - 2}\right]^2$

۴۱- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر θ و θ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β باشد. برآوردگر بیز پارامتر θ تحت تابع زیان $L(\theta, \delta) = e^{-\theta}(\theta - \delta)^2$ کدام است؟

۱) $e^{-\bar{X}}$

۲) $\dfrac{\alpha + \sum X_i}{n + \frac{1}{\beta}}$

۳) $\dfrac{\beta(\alpha + \sum X_i)}{(n+1)\beta + 1}$

۴) $\dfrac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i}{n + \beta}$

۴۲- فرض کنید X دارای توزیع لجستیک با پارامتر مکان θ با تابع توزیع زیر باشد.

$$F_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-(x - \theta)}}, -\infty < x < \infty, \theta \in \mathbb{R}$$

اگر θ دارای توزیع پیشین ناسره $\pi(\theta) = 1$ باشد، برآوردگر بیز تعمیم‌یافته θ تحت تابع زیان قدر مطلق خطا کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}X$

۲) $2X$

۳) $|X|$

۴) X

۴۳- فرض کنید X یک تک‌مشاهده از توزیع برنولی با پارامتر p باشد که در آن $p \in \{\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\}$. چهار برآورد $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$ و $\delta_۴$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\delta_1(0) = a_1 , \delta_1(1) = a_2 \quad , \quad \delta_2(0) = \delta_2(1) = a_1$$
$$\delta_3(0) = \delta_3(1) = a_2 \quad , \quad \delta_4(0) = a_2 , \delta_4(1) = a_1$$

تحت جدول تابع زیان زیر، کدام برآورد(ها) مینماکس است؟

p \ a	a_1	a_2
$\frac{۱}{۲}$	۳	۲
$\frac{۳}{۴}$	۱	۴

۱) δ_1 , δ_4
۲) δ_2
۳) δ_3
۴) δ_3 , δ_4

۴۴- فرض کنید $X_1 , \dots , X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0 , \theta)$ باشد. کدام مورد نادرست است؟

۱) $\overline{X^2}$، برای θ سازگار است.
۲) $\overline{X^2}$، UMVUE برای θ است.
۳) تحت تابع درجه دوم، $\overline{X^2}$ برآوردگر پذیرفتنی (مجاز، روا) برای θ است.
۴) تحت تابع زیان درجه دوم، در ردهٔ برآوردگرهای $a\overline{X^2}$، برآوردگر $\frac{n}{n+2}\overline{X^2}$ برای θ، دارای کمترین تابع مخاطره است.

۴۵- فرض کنید $X_1 , \dots , X_n$ نمونه تصادفی از توزیع $N(0 , \theta)$ باشد. تحت تابع زیان درجه ۲ (SEL)، در کلاس برآوردگرهای به فرم $D = \left\{c\overline{X^2} : c > 0 , \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum X_i^2\right\}$، برآوردگر پذیرفتنی (مجاز، روا) کدام است؟

۱) $\overline{X^2}$
۲) $\frac{n}{n+2}\overline{X^2}$
۳) $\frac{n}{n+1}\overline{X^2}$
۴) $\frac{1}{n+2}\overline{X^2}$