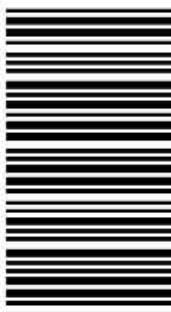


کد کنترل



270E

270

E

دفترچه شماره (۱)
صبح جمعه
۹۸/۱۲/۹



جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌تمترکز) – سال ۱۳۹۹

رشته آمار – کد (۲۲۳۲)

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ و ۲ - احتمال ۱ و ۲ - استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تعلیمی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برای مقرورات رفتار می‌شود.

۱۳۹۹

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، بهمنزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سوالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سوالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

$$1-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \int_0^x \frac{t^4 - 1}{3+t^4+t^6} dt}{\sin x} \text{ کدام است؟}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$2-\text{اگر برای هر } n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \times \dots \times \left(\frac{n+n}{n}\right) \text{ کدام است؟}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$3-\text{کدام گزینه درباره سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} \text{ درست است؟}$$

۱) همگرایی مشروط است.

۲) همگرایی مطلق است.

۳) دنباله مجموع جزئی آن بی‌کران است.

۴) دنباله مجموع جزئی آن کران‌دار است ولی واگرا است.

$$4-\text{اگر } f(x) = (\sin x)^{\frac{\ln(x)}{2}}, \text{ مقدار } (f')' \text{ کدام است؟}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

-۵ تعداد جواب‌های حقیقی و متمایز معادله $e^x + e^{-x} - x^2 = 2$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

-۶ ضریب x^5 در بسط مکلورن تابع $f(x) = (x-1)\tan^{-1} 2x$ کدام است؟

- $\frac{2^5}{5}$ (۱)
- $\frac{2^5}{5}$ (۲)
- $-\frac{2^5}{5!}$ (۳)
- $\frac{2^5}{5!}$ (۴)

-۷ حاصل عبارت $(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^8$ کدام است؟

- $2^8 \sin^8 \frac{\pi}{8} i$ (۱)
- $2^8 \sin^8 \frac{\pi}{8} i$ (۲)
- $-2^8 \cos^8 \frac{\pi}{8}$ (۳)
- $2^8 \cos^8 \frac{\pi}{8}$ (۴)

-۸ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sin(\pi x) \cdot \ln(x-1)$ کدام است؟

- $-\infty$ (۱)
- ۱ (۲)
- ۰ (۳)
- ۱ (۴)

-۹ مجموعه تمامی مقادیر عدد حقیقی p که به ازای آن سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n^p}$ همگرا است، کدام است؟

- $(0, \infty)$ (۱)
- $(1, \infty)$ (۲)
- $[0, \infty)$ (۳)
- $[1, \infty)$ (۴)

-۱۰ - مقدار $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}} dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

-۱۱ - ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ بر مجموعه $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ به ترتیب کدام است؟

(۱) ۱۱ و -۱

(۲) ۹ و -۱

(۳) ۹ و ۰

(۴) ۱۱ و ۰

-۱۲ - مقدار $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 \sin(\pi y^2) dy dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2\pi}$ (۲) $\frac{1}{6\pi}$ (۳) $\frac{-1}{2\pi}$ (۴) $\frac{-1}{6\pi}$

-۱۳ - فرض کنید منحنی C دایره $x^2 + y^2 = 4$ در جهت پاد ساعتگرد باشد. مقدار $\oint_C (3y - e^{\tanh x}) dx + (yx + \ln(\sec y)) dy$ کدام است؟

(۱) -26π (۲) -16π (۳) 16π (۴) 36π

-۱۴ - فرض کنید A, B دو پیشامد باشند و داشته باشیم $P(B|A) = P(B|A^c)$. کدام مورد صحیح است؟

(۱) $P(A \cap B) = 0$ (۲) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (۳) $P(A \cap B) < P(A)P(B)$ (۴) $P(A \cap B) > P(A)P(B)$

۱۵- سه پیشامد C , B , A را درنظر بگیرید که در آن $A \subset B$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$ و

$P(A \cap C) = \frac{1}{10}$ است. احتمال اینکه حداقل دو تا از این پیشامدها رخ دهد کدام است؟

$$\frac{1}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3}{10} \quad (2)$$

$$\frac{7}{10} \quad (3)$$

$$\frac{9}{10} \quad (4)$$

۱۶- فرض کنید X دارای توزیع بوآسون با نرخ $\ln 3$ و F تابع توزیع X باشد. مقدار $P(F(X) > 0)$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$e^{-2} \quad (3)$$

$$1 - e^{-2} \quad (4)$$

۱۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است. اگر قرار دهیم $E(Y) = \frac{1}{X}$, مقدار $E(Y)$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}, \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۱۸- اگر $(2, 4)$ باشد، مقدار $P[X^2 - 4X > 0]$ کدام است؟

$$e^{-2} \quad (1)$$

$$0.3174 \quad (2)$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$0.3417 \quad (4)$$

- ۱۹- فرض کنید $Z \sim N(0,1)$ است. مقدار $E(Z^7 e^{\frac{1}{2}Z^2})$ کدام است؟

- $\sqrt{2}$ (۱)
- $\sqrt{2}$ (۲)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴)

- ۲۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. اگر $m < n$ ، مقدار

$$\begin{aligned} E[X_1 | X = m] \\ \frac{(m-1)p}{n} \\ \frac{m-1}{n} \\ \frac{m}{n} \\ \frac{mp}{n} \end{aligned}$$

- ۲۱- فرض کنید $Y \sim U(1,2)$ و $Z \sim E(1)$ ، $X \sim E(1)$. سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مقدار $P(X > Y > Z)$ کدام است؟

- $e^{-1} - 2e^{-2}$ (۱)
- $e^{-2} - e^{-4}$ (۲)
- $e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-4}$ (۳)
- $e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3} + \frac{1}{4}e^{-5}$ (۴)

- ۲۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار

$$P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq 0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$$

- $\frac{1}{\gamma^n}$ (۱)
- $\frac{1}{\gamma^{n-1}}$ (۲)
- $1 - \frac{1}{\gamma^n}$ (۳)
- $1 - \frac{1}{\gamma^{n-1}}$ (۴)

-۲۳- پرنده‌ای هر بار N تخم می‌گذارد که N دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۲ است. هر کدام از تخم‌های این پرنده با احتمال $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جوچه می‌شود. اگر X تعداد تخم‌های جوچه شده در یک بار تخم‌گذاری این پرنده باشد، ضریب همبستگی N و X کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

-۲۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با ویژگی‌های زیر باشند. مقدار $\text{Var}(X)$ کدام است؟
 $Y \sim P(2)$ ، $E(t^X | Y) = q + pt^Y$ ، $0 < t < 1$ ، $q = 1 - p$

$$3p(2-p) \quad (1)$$

$$2p(3-p) \quad (2)$$

$$3p(3-2p) \quad (3)$$

$$2p(3-2p) \quad (4)$$

-۲۵- فرض کنید Z_1, Z_2, \dots, Z_n یک دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد باشد. توزیع

$$\text{حدی } Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i + \frac{1}{n})}{\sqrt{n}} \quad \text{کدام است؟}$$

(۱) نرمال استاندارد

(۲) نمایی با میانگین ۱

(۳) تباهیده در نقطه صفر

(۴) نرمال با میانگین صفر و واریانس ۲

-۲۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال برای θ کدام است؟

x	-1	0	1
$f_\theta(x)$	θ	$1-2\theta$	θ

$$, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}$$

$$|\sum x_i| \quad (1)$$

$$\sum x_i | \quad (2)$$

$$|\sum x_i^r| \quad (3)$$

$$\sum x_i \quad (4)$$

۲۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازه $[\theta, -\theta]$ باشد. آماره بسته کامل برای θ کدام مورد است؟

$$(X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}, X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\})$$

$$T = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} \quad (1)$$

$$T = (X_{(1)}, X_{(n)}) \quad (2)$$

$$T = \min\{-X_{(1)}, X_{(n)}\} \quad (3)$$

$$T = \max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\} \quad (4)$$

۲۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. اگر \bar{X} و S^2 به ترتیب میانگین و واریانس نمونه باشند، مقدار $\text{cov}(\bar{X}, S^2)$ کدام است؟

۱) ۰

$$\frac{\lambda}{n} \quad (2)$$

$$\frac{\lambda^2}{n} \quad (3)$$

$$n\lambda \quad (4)$$

۲۹- اگر $x = \frac{4}{9}$ یک تک مشاهده از توزیع $U(\theta^*, \theta^*)$ باشد، برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامتر θ کدام است؟

$$\frac{16}{81} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

۳۰- X یک متغیر تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر است. اگر $\hat{\theta}$ نمایانگر برآورده ماقزیمم درستنمایی پارامتر θ براساس تک مشاهده باشد، مقدار $E(\hat{\theta})$ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \frac{1}{4}(1+\theta x), |x| \leq 2, |\theta| \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\theta}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1+\theta}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\theta}{2} \quad (3)$$

۰ (۴)

- ۳۱ فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد گشتاوری

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

$$\bar{x} \ln(\frac{x}{\bar{x}}) \quad (1)$$

$$\bar{x} \ln(\frac{\bar{x}}{x}) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\bar{x}} \ln(\frac{1}{x}) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\bar{x}} \ln(\frac{x}{\bar{x}}) \quad (4)$$

- ۳۲ فرض کنید T_1 و T_2 دو برآوردگر ناریب برای θ باشند به‌طوری‌که $Var(T_1) = Var(T_2) = 4\theta^2$ باشد. کدام مورد صحیح است؟ برآوردگر UMVU برای θ با واریانس θ^2 باشد.

$$\text{Corr}(T_1, T_2) \geq -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Corr}(T_1, T_2) \geq -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Corr}(T_1, T_2) \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\text{Corr}(T_1, T_2) \leq \frac{1}{3} \quad (4)$$

- ۳۳ فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. برآوردگر ناریب با کمترین واریانس یکتا $\gamma(\lambda) = (\lambda + 1)e^{-\lambda}$ کدام است؟

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n-1} \sum x_i \right)^{\sum x_i} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n-1} \sum x_i \right)^n \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n-1} \sum x_i \right)^n \quad (3)$$

$$\left(\frac{n-1}{n} \right)^{\sum x_i} \left(1 + \frac{1}{n-1} \sum x_i \right) \quad (4)$$

- ۳۴- فرض کنید X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ باشد. $UMVUE$ پارامتر λ براساس یک تک مشاهده از متغیر تصادفی $Y = X | X \geq 1$ کدام است؟

$$h(y) = y \quad (1)$$

$$h(y) = \begin{cases} y & y = 1, 2, \dots \\ 1 & y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$h(y) = \begin{cases} y & y = 2, 3, \dots \\ 0 & y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$h(y) = \begin{cases} 2y & y = 4, 5, 6, \dots \\ 0 & y = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4)$$

- ۳۵- فرض کنید $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال زیر باشند. $UMVUE$ پارامتر θ کدام است؟

$$f_\theta(x_i) = e^{-(x_i - i\theta)}, \quad x_i \geq i\theta, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\min\{iX_i\} - \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\min\left\{\frac{X_i}{i}\right\} - \frac{1}{n} \quad (2)$$

$$\min\{iX_i\} - \frac{2}{n(n+1)} \quad (3)$$

$$\min\left\{\frac{X_i}{i}\right\} - \frac{2}{n(n+1)} \quad (4)$$

- ۳۶- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ باشد که در آن θ پارامتر مکان است و $I_X(\theta)$ نمایانگر مقدار اطلاع فیشر X درباره θ است. کدام مورد درست است؟

(۱) $I_X(\theta)$ به θ بستگی ندارد.

(۲) $I_X(\theta)$ بر حسب θ اکیداً نزولی است.

(۳) $I_X(\theta)$ بر حسب θ اکیداً صعودی است.

(۴) $I_X(\theta)$ بر حسب θ تابعی اکیداً محدب است.

- ۳۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازه $[0, \theta]$ باشد. برآورده‌گر

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$\theta \quad (1)$$

$$\theta e \quad (2)$$

$$e^{-1} \quad (3)$$

$$\theta e^{-1} \quad (4)$$

- ۳۸- اگر X یک تک مشاهده از توزیع یکنواخت بر بازه (θ, ∞) باشد که در آن $\theta > 1$ است، با درنظر گرفتن تابع زیان

مربع خطأ و تابع چگالی احتمال پیشین $P(\theta) = \frac{1}{\theta^2}, \theta > 1$ برآوردگر بیز θ کدام است؟

$\hat{\theta} = X_{(1)}$

$\sqrt{\max(X_{(1)}, 1)}$

$\sqrt{\min(X_{(1)}, 1)}$

$\min(X_{(1)}, 1)$

- ۳۹- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر تابع چگالی احتمال پیشین

به صورت $\pi(\theta) = e^{-\theta}, \theta > 0$ باشد، برآوردگر بیز $L(\theta, \delta) = \min(X_{(1)}, X_{(2)})$ کدام

است؟

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta$$

$$\frac{1}{2}(e^{X_{(1)}} + 1)$$

$$\frac{1}{2}(e^{-X_{(1)}} + 1)$$

$$\frac{1}{2}(e^{X_{(1)}} - 1)$$

$$\frac{1}{2}(e^{-X_{(1)}} - 1)$$

- ۴۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه (θ, ∞) باشد و θ دارای تابع چگالی

احتمال پیشین $\pi(\theta) = \frac{\alpha a^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \theta \geq a$ معلوم هستند. برآوردگر بیز پارامتر θ

$L(\theta, \delta) = \frac{(\delta - \theta)^2}{\theta^2}$ تحت تابع زیان $(x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n))$ کدام است؟

$$\frac{n+\alpha}{n+\alpha+1} \operatorname{Max}\{X_{(n)}, a\}$$

$$\frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1} \operatorname{Max}\{X_{(n)}, a\}$$

$$\frac{n+\alpha+1}{n+\alpha+2} \operatorname{Max}\{X_{(n)}, a\}$$

$$\frac{n+\alpha-1}{n+\alpha-2} \operatorname{Max}\{X_{(n)}, a\}$$

- ۴۱ فرض کنید $1,0/1,1/5,2,1/7$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازه $(0, \infty)$ باشد. اگرتابع چگالی احتمال پیشین θ به صورت زیر باشد، برآوردگر بیز θ تحت تابع زیان مربع خطأ (SEL) کدام است؟

$$\pi(\theta) = \frac{24}{\theta^4}, \theta \geq 2$$

$$\frac{24}{7} \quad (1)$$

$$\frac{21}{8} \quad (2)$$

$$\frac{16}{7} \quad (3)$$

$$\frac{4}{35} \quad (4)$$

- ۴۲ فرض کنید $\theta \sim N(0,1)$, $X | \theta \sim N(\theta, 1)$ باشند. تحت تابع زیان زیر، برآوردگر بیز θ کدام است؟

$$L(\theta, a) = e^{(a-\theta)} - (a-\theta) - 1$$

$$\frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x}{2} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \quad (4)$$

- ۴۳ فرض کنید $0 < \theta < \theta_0$, $X \sim N(\sqrt{\theta}, \theta)$ که در آن θ مقدار معلومی است. اگر تابع زیان $\delta_c : \delta_c(x) = cx^2$, $c > 0$ باشد، برآوردگر مینیماکس در کلاس D کدام است؟

$$D = \left\{ \delta_c : \delta_c(x) = cx^2, c > 0 \right\}$$

$$\frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\theta_c x^2}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\theta_c x^2}{5} \quad (4)$$

۴۴- فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشند. تحت تابع زیان مربع خطأ در کلاس برآوردهای خطی به صورت $ax_1 + bx_2$ ، کدام برآوردگر برای پارامتر θ مینیماکس است؟

$$X_1 \quad (1)$$

$$\frac{X_1 + X_2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{X_1 + X_2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{X_1 + X_2}{4} \quad (4)$$

۴۵- فرض کنید X تک مشاهده‌ای از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. با درنظر گرفتن تابع احتمال پیشین

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{14}{10} & x=0 \\ \frac{22}{14} & x=1 \end{cases} \quad \text{برای برآوردهای } \pi(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta=1, 2 \\ 2 & \theta=3 \\ 0 & \theta=0 \end{cases}$$

صحیح است؟

(۱) $\delta(x)$ برآوردهای بیز و غیرمجاز (ناپذیرفتی) است.

(۲) $\delta(x)$ برآوردهای غیربیزی و غیرمجاز (ناپذیرفتی) است.

(۳) $\delta(x)$ برآوردهای بیز و مجاز (پذیرفتی) است.

(۴) $\delta(x)$ برآوردهای غیربیزی و مجاز (پذیرفتی) است.

θ	۰	۱
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
۲	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
۳	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

