

کد کنترل

474

A

474A

آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه متمرکز) - سال ۱۴۰۰

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه

۹۹/۱۲/۱۵



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»
امام خمینی (ره)

رشته فیزیک - (کد ۲۲۳۸)

مدت پاسخ گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: - مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته - الکترومغناطیس و الکتروپنایک - ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- پرتویی از اتم‌های خنثی (از لحاظ الکتریکی) از دستگاه آزمایش اشترن - گِرلاخ عبور می‌کند. روی صفحه آشکارساز پنج خط دیده می‌شود. J ، تکانه زاویه‌ای کل این اتم‌ها کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{5}{2}$

۲- هامیلتونی یک سیستم در سه بعد $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) - m\omega^2 x_0 \hat{x}$ است که

ω ، m و x_0 مقادیر ثابت حقیقی و ψ_n ها ویژه حالت‌های هامیلتونی هستند. کدام رابطه در مورد این سیستم نادرست است؟

(۱) $\langle \psi_n | \hat{x} | \psi_n \rangle = x_0$

(۲) $\langle \psi_n | \hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z | \psi_n \rangle = 0$

(۳) $\langle \psi_n | \hat{p}_x | \psi_n \rangle = 0$

(۴) $\langle \psi_n | \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} | \psi_n \rangle = 0$

۳- نیروی $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ به ذره‌ای به جرم m وارد می‌شود. اگر تابع موج این ذره در فضای تکانه در معادله

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - a \nabla_{\vec{p}}^2 \right) \phi(\vec{p}, t) = i\hbar \frac{\partial \phi(\vec{p}, t)}{\partial t}$$

صدق کند که a ضریب ثابت مثبتی است، نیروی $\vec{F}(\vec{r})$ کدام است؟

(۱) $-\frac{a\hbar^2}{2} |\vec{r}| \vec{r}$

(۲) $\frac{2a}{\hbar^2} \vec{r}$

(۳) $\frac{a\hbar^2}{2} |\vec{r}| \vec{r}$

(۴) $-\frac{2a}{\hbar^2} \vec{r}$

۴- تابع موج بهنجار یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی به صورت $\psi(x) = A\psi_0(x) + B\psi_1(x)$ است که توابع بهنجار $\psi_0(x)$ و $\psi_1(x)$ به ترتیب حالت پایه و اولین حالت برانگیخته‌ی این نوسانگرند. به ازای چه مقادیری از A و B مقدار میانگین عملگر مکان \hat{x} بیشینه است؟ (A و B ضرایب حقیقی اند).

$$(۱) \quad A = 0, \quad B = 1$$

$$(۲) \quad A = 1, \quad B = 0$$

$$(۳) \quad A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(۴) \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵- ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر پتانسیل یک بعدی $V(x) = bV_0\delta(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2$ حرکت می‌کند، که V_0 و b مقادیر ثابت مثبتی هستند. برای گذار این ذره از حالت برانگیخته دوم به حالت برانگیخته سوم چه مقدار انرژی لازم است؟

$$(۱) \quad \hbar\omega$$

$$(۲) \quad 2\hbar\omega$$

$$(۳) \quad \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$(۴) \quad \frac{5}{2}\hbar\omega$$

۶- بردار حالت $|\psi\rangle$ ویژه حالت مشترک عملگر خطی A و عملگر پاریته π است. اگر A و π با یکدیگر پادجاب‌جا شوند $(A\pi + \pi A = 0)$ حاصل $A|\psi\rangle$ کدام است؟

$$(۱) \quad \text{صفر}$$

$$(۲) \quad |\psi\rangle$$

$$(۳) \quad -|\psi\rangle$$

$$(۴) \quad \frac{1}{2}|\psi\rangle$$

۷- عملگر دوران حول محور y به اندازه زاویه θ یعنی عملگر $d(\theta) = e^{-i\theta J_y}$ در فضای هیلبرتی که شرط $J_y^2 = J_y$ برقرار است، به چه شکلی در می‌آید؟

$$(۱) \quad \cos\theta J_y + i\sin\theta J_y^2$$

$$(۲) \quad 1 + (\cos\theta - 1)J_y + i\sin\theta J_y^2$$

$$(۳) \quad \cos\theta J_y - i\sin\theta J_y^2$$

$$(۴) \quad 1 + (\cos\theta - 1)J_y - i\sin\theta J_y^2$$

۸- برای ذره‌ی آزاد، در تصویر هاینبرگ حاصل ضرب عدم قطعیت مکان ذره در لحظه‌ی $t = 0$ در عدم قطعیت مکان

ذره در لحظه‌ی دلخواه $t > 0$ یعنی کمیت $\sigma = \left\langle (\Delta x_i)_t^2 \right\rangle \left\langle (\Delta x_i)_{t=0}^2 \right\rangle$ در کدام رابطه صدق می‌کند؟

$$\sigma \geq \frac{\hbar t}{2m} \quad (1)$$

$$\sigma \leq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \quad (2)$$

$$\sigma \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \quad (3)$$

$$\sigma \leq \frac{\hbar t}{m} \quad (4)$$

۹- اگر U عملگر تحول زمانی شرودینگری، بالانویس H نشان‌گر دیدگاه هاینبرگی و بالانویس S نشان‌گر دیدگاه شرودینگری باشد، کدام دسته از چهار گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) در دیدگاه هاینبرگی پایه‌های فضای هیلبرت در طول زمان با عملگر U^{-1} متحول می‌شوند.

ب) در دیدگاه شرودینگری پایه‌های مکان یا تکانه در فضای هیلبرت در طول زمان ثابت هستند.

ج) اگر $A^{(H)}$ مشاهده‌پذیری در دیدگاه هاینبرگی و $\{|\alpha_{i,0}\rangle\}$ ویژه‌حالت‌های آن در لحظه $t = 0$ با ویژه‌مقادیر α_i

باشند، حالت‌های $\{U^\dagger |\alpha_{i,0}\rangle\}$ نیز ویژه‌حالت‌های همان عملگر در لحظه دلخواه $t > 0$ با همان ویژه‌مقادیر هستند.

د) در دیدگاه شرودینگری، یک مشاهده‌پذیر تابع زمان همواره دارای ویژه‌مقادیری مستقل از زمان است.

(۱) الف، ب و ج

(۲) ب، ج و د

(۳) فقط الف و ب

(۴) فقط ب و د

۱۰- انرژی‌های یک سامانه چهار تراز به ترتیب $E_1 = -14\text{eV}$ ، $E_2 = -9\text{eV}$ ، $E_3 = -7\text{eV}$ و $E_4 = -5\text{eV}$

است. اگر آهنگ گذار از تراز سوم به ترازهای اول و دوم به ترتیب $A_{31} = 7 \times 10^7 \text{s}^{-1}$ و $A_{32} = 1/3 \times 10^8 \text{s}^{-1}$

آهنگ گذار از تراز چهارم به تراز سوم $A_{43} = 3 \times 10^8 \text{s}^{-1}$ باشد، طول عمر تابشی تراز سوم چند ثانیه است؟

$$2/0 \times 10^{-9} \quad (1)$$

$$4/5 \times 10^{-8} \quad (2)$$

$$1/0 \times 10^{-8} \quad (3)$$

$$5/0 \times 10^{-9} \quad (4)$$

- ۱۱- یک مولکول دو اتمی متشکل از دو اتم با جرم یکسان M و فاصله D از یکدیگر حول محور تقارن عمود بر \vec{D} دوران می‌کند. اختلاف انرژی دو خط متوالی در طیف تابشی دورانی این مولکول کدام است؟

$$\frac{\hbar^2 J}{2MD^2} \quad (۱)$$

$$\frac{2\hbar^2 J}{MD^2} \quad (۲)$$

$$\frac{J(J+1)\hbar^2}{2MD^2} \quad (۳)$$

$$\frac{2(J+1)\hbar^2}{MD^2} \quad (۴)$$

- ۱۲- انرژی پتانسیل الکترونی که در فاصله x از سطح آزاد یک مایع هیدروژن قرار دارد به شکل

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{x} & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

الکتریکی ثابت $\hat{E} = E_0$ روشن شود و الکترون فقط بتواند در راستای x حرکت کند، انرژی حالت پایه الکترون تا مرتبه‌ی اول از E_0 کدام است؟

$$(a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \text{ است که } R_{1,0}(r) = \frac{\chi(r)}{r} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \text{ تابع موج شعاعی اتم هیدروژن به شکل})$$

$$-\frac{m_e \lambda^2}{2\hbar^2} - \frac{2\hbar^2 e E_0}{4m_e \lambda} \quad (۱)$$

$$-\frac{m_e \lambda^2}{2\hbar^2} + \frac{2\hbar^2 e E_0}{2m_e \lambda} \quad (۲)$$

$$-\frac{m_e \lambda^2}{\hbar^2} + \frac{\hbar^2 e E_0}{2m_e \lambda} \quad (۳)$$

$$-\frac{m_e \lambda^2}{\hbar^2} - \frac{2\hbar^2 e E_0}{3m_e \lambda} \quad (۴)$$

۱۳- بنابر داده‌های تجربی سه نوع نوترینوی ν_e ، ν_μ و ν_τ در طبیعت وجود دارد که جرم ناچیزی دارند و در طول زمان این نوترینوها به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در فضای هیلبرتی که پایه آن به ترتیب از سه حالت نوترینوی

$$H = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & \hbar\omega & \hbar\omega \\ \hbar\omega & m_0 c^2 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & \hbar\omega & m_0 c^2 \end{pmatrix} \quad \text{نامبرده در بالا تشکیل شده است، هامیلتونی حاکم بر این رویداد به شکل}$$

است. m_0 و ω مقادیر ثابت مثبتی هستند. E_i ها، ویژه مقدارهای این هامیلتونی، کدامند؟

$$E_\psi = m_0 c^2 + \hbar\omega, E_\gamma = m_0 c^2 - \hbar\omega, E_\lambda = m_0 c^2 + \sqrt{2}\hbar\omega \quad (۱)$$

$$E_\gamma = E_\psi = m_0 c^2 + \hbar\omega, E_\lambda = m_0 c^2 - \sqrt{2}\hbar\omega \quad (۲)$$

$$E_\gamma = E_\psi = m_0 c^2 - \hbar\omega, E_\lambda = m_0 c^2 + \sqrt{2}\hbar\omega \quad (۳)$$

$$E_\psi = m_0 c^2 - \sqrt{2}\hbar\omega, E_\gamma = m_0 c^2 - \hbar\omega, E_\lambda = m_0 c^2 - \sqrt{2}\hbar\omega \quad (۴)$$

۱۴- در سوال ۱۳ اگر در لحظه $t=0$ یک نوترینوی ν_e به وجود آمده باشد، احتمال آن که این نوترینو در زمان دلخواه $t > 0$ به نوترینوی ν_μ تبدیل شود، چقدر است؟

$$\frac{1}{9}(1 - \cos 2\omega t) \quad (۱)$$

$$\frac{2}{9}(1 - \cos 2\omega t) \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3}(1 - \cos 4\omega t) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3}(1 - \cos \omega t) \quad (۴)$$

۱۵- ذره‌ای به جرم m و انرژی $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ از پتانسیل کروی $V(r) = V_0 e^{-\lambda r^2}$ به طور کشسان پراکنده می‌شود. V_0 و λ مقادیر ثابت مثبتی هستند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی در تقریب اول بورن کدام است؟ (θ زاویه پراکندگی است.)

$$\frac{\pi m^2 V_0^2}{4\hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{2k^2 \sin^2(\theta/2)}{\lambda}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{m^2 V_0^2}{2\hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{k^2 \sin^2(\theta/2)}{2\lambda}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{\pi m^2 V_0^2}{4\hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{2k^2 \sin^2 \theta}{\lambda}\right) \quad (۳)$$

$$\frac{m^2 V_0^2}{2\hbar^4 \lambda^3} \exp\left(-\frac{k^2 \sin^2 \theta}{2\lambda}\right) \quad (۴)$$

۱۶- بار الکتریکی به صورت سطحی با چگالی $\sigma(r, \theta)$ روی نیم صفحه نامتناهی $\varphi = \varphi_0$ توزیع شده است که (r, θ, φ) مختصات کروی یک نقطه در فضا است. معادله پواسون برای پتانسیل الکتریکی $\Phi(r, \theta, \varphi)$ کدام است؟

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{\sigma(r, \theta)}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r^2 \sin \theta} \quad (۱)$$

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{\sigma(r, \theta)}{\epsilon_0} \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r \sin \theta} \quad (۲)$$

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{\sigma(r, \theta)}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r^2 \sin \theta} \quad (۳)$$

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{\sigma(r, \theta)}{\epsilon_0} \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (۴)$$

۱۷- یک پوسته کروی فرضی به مرکز O و شعاع R در فضایی که در آن بار الکتریکی ساکن وجود دارد در نظر بگیرید. اگر $\bar{\Phi}_S$ پتانسیل الکتریکی متوسط روی سطح این پوسته و Φ_0 پتانسیل الکتریکی در مرکز این پوسته باشد، کدام عبارت همواره درست است؟ (Q_{in} بار الکتریکی خالص داخل پوسته و Q_{out} بار الکتریکی خالص خارج پوسته است.)

$$(۱) \text{ اگر بار الکتریکی داخل پوسته وجود نداشته باشد } \Phi_0 = \bar{\Phi}_S.$$

$$(۲) \text{ اگر بار الکتریکی داخل پوسته وجود نداشته باشد } \Phi_0 = \bar{\Phi}_S / 4\pi.$$

$$(۳) \text{ اگر } Q_{in} \neq 0 \text{ و } Q_{out} \neq 0 \text{ در این صورت } \bar{\Phi}_S = Q_{in} / 4\pi\epsilon_0 R.$$

$$(۴) \text{ اگر } Q_{in} \neq 0 \text{ و } Q_{out} \neq 0 \text{ در این صورت } \bar{\Phi}_S = Q_{out} / 4\pi\epsilon_0 R.$$

۱۸- پتانسیل الکتریکی در داخل یک ناحیه استوانه‌ای به شعاع R متشکل از دو نیم پوسته نازک رسانای نامتناهی استوانه‌ای به شعاع R (که محور آن در راستای z است) با شرایط مرزی $\Phi(\rho, \varphi) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho R \sin \varphi}{R^2 - \rho^2} \right)$ به صورت $\Phi(\rho = R, \varphi) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -V_0 & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$ چگالی بار

سطحی روی سطح داخلی دو نیم استوانه کدام است؟

$$-\frac{2\epsilon_0 V_0 \sin \varphi}{\pi R} \quad (۱)$$

$$-\frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi R \sin \varphi} \quad (۲)$$

$$\frac{2\epsilon_0 V_0 \sin \varphi}{\pi R} \quad (۳)$$

$$\frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi R \sin \varphi} \quad (۴)$$

۱۹- تابع گرین $G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{<}^{\ell} r_{>}^{\ell}}{R^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')$ مربوط به ناحیه داخلی

یک مرز کروی به شعاع R با شرط مرزی دیریشله است. پتانسیل الکتریکی در ناحیه بین یک پوسته کروی عایق به شعاع a با توزیع بار سطحی $\sigma(a, \theta, \varphi)$ و یک پوسته رسانای کروی به شعاع b که در پتانسیل الکتریکی صفر نگه داشته شده کدام است؟ (دو پوسته به صورت هم مرکز قرار گرفته اند و

$$b > a \quad \text{و} \quad A_{\ell m} = \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \sigma(a, \theta', \varphi') Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') a^{\ell} d\Omega' \quad (\text{است}).$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r}{b} \right)^{\ell} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \left(\frac{b}{r} \right)^{2\ell} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (۱)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{r}{a} \right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b} \right)^{2\ell} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (۲)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b} \right)^{2\ell} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (۳)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{\ell} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{b}{r} \right)^{2\ell} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (۴)$$

۲۰- توزیع باری در کل فضا با چگالی $\rho(\vec{x}) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2}{15\pi}} \frac{e}{a_0^3} \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \exp(-r/a_0) Y_{22}(\theta, \varphi)$ وجود دارد. اگر در

هر نقطه پتانسیل الکتریکی را به صورت $\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}}$ بنویسیم،

ضریب‌های $q_{\ell m}$ کدام‌اند؟ (a_0 مقدار ثابتی است).

$$q_{\ell m} = 45 \sqrt{\frac{2}{15\pi}} e a_0^3 \delta_{\ell 2} \delta_{m 2} \quad (۱)$$

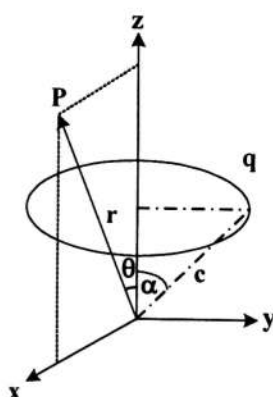
$$q_{\ell m} = 315 \sqrt{\frac{2}{15\pi}} e a_0^3 \delta_{\ell 2} \delta_{m 2} \quad (۲)$$

$$q_{\ell m} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{15\pi}} e a_0^3 \delta_{\ell 2} \delta_{m 2} \quad (۳)$$

$$q_{\ell m} = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{2}{15\pi}} e a_0^3 \delta_{\ell 2} \delta_{m 2} \quad (۴)$$

۲۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) برای هر توزیع بار دلخواه، تعداد عناصر دکارتی مستقل تانسور \mathcal{Y}^{ℓ} قطبی الکتریکی برابر $2\ell + 1$ است.
- (۲) رد تانسور Q_{ij} ، تانسور چهارقطبی الکتریکی دکارتی، برای هر توزیع بار دلخواه صفر است.
- (۳) برای یک توزیع بار دلخواه، ممان‌های چند قطبی الکتریکی دکارتی مرتبه ℓ مستقل از مبدأ مختصات اند.
- (۴) برای هر توزیع بار دلخواه، تانسور دکارتی \mathcal{Y}^{ℓ} قطبی الکتریکی نسبت به تعویض هر دو اندیس دلخواه متقارن است.
- ۲۲- مرکز یک حلقه دایره‌ای مطابق شکل زیر روی محور z و صفحه حلقه موازی صفحه $x-y$ است. شعاع حلقه $c \sin \alpha$ است و بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. در نقطه P واقع در صفحه $x-z$ با مختصات کروی (r, θ) پتانسیل الکتریکی کدام است؟ ($r_>$ طول بزرگتر (کوچک‌تر) بین c و r است.)



$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_>^{\ell}}{r_<^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \alpha) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (۱)$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \alpha) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (۲)$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_>^{\ell}}{r_<^{\ell+1}} - \frac{r_<^{\ell}}{a^{\ell+1}} \right) P_{\ell+1}(\cos \alpha) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (۳)$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_>^{\ell}}{a^{\ell+1}} - \frac{r_<^{\ell} r_>^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) P_{\ell+1}(\cos \alpha) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (۴)$$

۲۳- یک کره دی الکتریک خطی و همسانگرد به شعاع R و ثابت دی الکتریک K در هوا (با ثابت دی الکتریک تقریبی $K_{\text{air}} = 1$) در حضور میدان الکتریکی ثابت خارجی $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی در نقاط خارج از کره معادل مجموع میدان الکتریکی \vec{E} و میدان الکتریکی یک دوقطبی با ممان دوقطبی \vec{p} است. اندازه بردار \vec{p} کدام است؟

$$4\pi\epsilon_0 \left(\frac{K-1}{K+3} \right) E_0 R^3 \quad (1)$$

$$4\pi\epsilon_0 \left(\frac{K-1}{2K+1} \right) E_0 R^3 \quad (2)$$

$$4\pi\epsilon_0 \left(\frac{K-1}{3K+1} \right) E_0 R^3 \quad (3)$$

$$4\pi\epsilon_0 \left(\frac{K-1}{K+2} \right) E_0 R^3 \quad (4)$$

۲۴- پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی در نقطه \vec{x} داخل و خارج کره‌ای به شعاع R با مغناطش یکنواخت $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ در مختصات کروی کدام است؟

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{3} M_0 R^2 \frac{r_{\leq}^2}{r_{\geq}^3} P_1(\cos\theta) \quad (1)$$

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{3} M_0 R^2 \frac{r_{\geq}^2}{r_{\leq}^3} P_1(\cos\theta) \quad (2)$$

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{3} M_0 R^2 \frac{r_{\leq}^2}{r_{\geq}^3} P_1(\cos\theta) \quad (3)$$

$$\Phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{3} M_0 R^2 \frac{r_{\geq}^2}{r_{\leq}^3} P_1(\cos\theta) \quad (4)$$

۲۵- یک سیم لوله استوانه‌ای نامتناهی به شعاع R که در واحد طول آن n دور سیم حامل جریان I وجود دارد در نظر بگیرید. در مختصات استوانه‌ای که محور z آن منطبق بر محور سیم لوله است پتانسیل برداری در داخل و خارج سیم لوله کدام است؟ (ρ فاصله یک نقطه از محور z و $\hat{\phi}$ بردار یکه در مختصات استوانه‌ای است. $\rho_{>}$ طول بزرگتر (کوچک‌تر) بین ρ و R است.)

$$\mu_0 n I R \left(\frac{\rho_{\leq}}{\rho_{>}} \right) \hat{\phi} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \mu_0 n I R \left(\frac{\rho_{\geq}}{\rho_{\leq}} \right) \hat{\phi} \quad (2)$$

$$\mu_0 n I R \left(\frac{\rho_{\geq}}{\rho_{\leq}} \right) \hat{\phi} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \mu_0 n I R \left(\frac{\rho_{\leq}}{\rho_{>}} \right) \hat{\phi} \quad (4)$$

۲۶- اگر $F^{\mu\nu}$ تانسور میدان الکترومغناطیسی باشد، حاصل عبارت $\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ متناسب با کدام کمیت

است؟ (۱) c

(۱) $E^2 - B^2$

(۲) $E^2 + B^2$

(۳) $\vec{E} \times \vec{B}$

(۴) $(\vec{E} \times \vec{B}) \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$

۲۷- یک موج الکترومغناطیسی تخت که در جهت \hat{z} منتشر می‌شود از ناحیه $z < 0$ که عایق و دارای ضریب شکست n_1 است به صورت عمود وارد ناحیه $z > 0$ که عایق و دارای ضریب شکست n_2 است، می‌شود. ضریب عبور کدام است؟

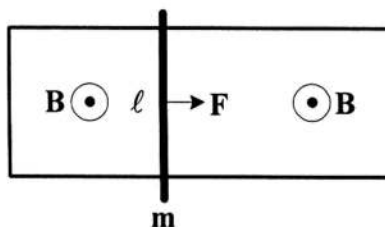
(۱) $\left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$

(۲) $\frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

(۳) $\frac{2n_2}{n_1 + n_2}$

(۴) $\frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

۲۸- سیمی به جرم m و طول ℓ می‌تواند بدون اصطکاک روی ریل افقی U شکل رسانای بدون اصطکاکی بلغزد. از لحظه $t = 0$ سیم تحت تاثیر نیروی ثابت F که همواره به صورت افقی به آن وارد می‌شود از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر مطابق شکل زیر میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر صفحه ریل اعمال شود، جریان القایی گذرنده از سیم کدام است؟ (مقاومت الکتریکی سیم را R فرض کنید و از مقاومت الکتریکی ریل و خودالقایی سیم صرف نظر کنید).



(۱) $\frac{FB\ell}{mR} \exp\left(-\frac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(۲) $\frac{F}{B\ell} \left[1 - \cos\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}t\right) \right]$

(۳) $\frac{F}{B\ell} \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2\ell^2}{mR}t\right) \right]$

(۴) $\frac{FB\ell}{mR}t$

۲۹- در ناحیه بین دو پوسته استوانه‌ای هم‌محور نامتناهی به شعاع‌های a و b ($b > a$) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}$ و $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi}$ ایجاد شده است. محور z منطبق بر محور مشترک استوانه‌ها و $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ بردارهای یک‌ه در مختصات استوانه‌ای هستند. مقدار تکانه خطی الکترومغناطیسی ذخیره شده در واحد طول استوانه برای فضای میان دو پوسته کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{\mu_0 \lambda I}{\lambda \pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(۲) \quad \frac{\mu_0 \lambda I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(۳) \quad \frac{\mu_0 \lambda I}{\lambda \pi} \left[\frac{b}{a} - \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$(۴) \quad \frac{\mu_0 \lambda I}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{b}{a} - \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

۳۰- \vec{E} و \vec{B} به ترتیب بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب مرجع S اند. از دید ناظری در چارچوب مرجع S' که با سرعت \vec{v} ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$) نسبت به S در حرکت است، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی \vec{E}' و \vec{B}' چه رابطه‌ای با \vec{E} و \vec{B} دارند؟

$$(۱) \quad \vec{B}' = \gamma(\vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\vec{\beta} \quad \text{و} \quad \vec{E}' = \gamma(\vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta}$$

$$(۲) \quad \vec{B}' = \gamma(\vec{B} + \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\vec{\beta} \quad \text{و} \quad \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta}$$

$$(۳) \quad \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\vec{\beta} \quad \text{و} \quad \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta}$$

$$(۴) \quad \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\vec{\beta} \quad \text{و} \quad \vec{E}' = \gamma(\vec{E} - \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\vec{\beta}$$

۳۱- شرایط پایداری حالت تعادل ترمودینامیکی یک سیستم کدام است؟ (C_V گرمای ویژه در حجم ثابت، C_P گرمای ویژه در فشار ثابت، κ_T ضریب فشردگی در دمای ثابت و κ_S ضریب فشردگی در آنتروپی ثابت هستند).

$$(۱) \quad \kappa_T \geq \kappa_S \geq 0, \quad C_P \geq C_V \geq 0$$

$$(۲) \quad \kappa_S \geq \kappa_T \geq 0, \quad C_P \geq C_V \geq 0$$

$$(۳) \quad 0 \leq \kappa_T \leq \kappa_S, \quad 0 \leq C_P \leq C_V$$

$$(۴) \quad 0 \leq \kappa_S \leq \kappa_T, \quad 0 \leq C_V \leq C_P$$

۳۲- یک میله مغناطیسی با حجم $\frac{1}{2}m^3$ در دمای ثابت $6K$ قرار دارد. میدان مغناطیسی خارجی H به آرامی از مقدار صفر تا $10^8 \frac{A}{m}$ افزایش می‌یابد. اگر رفتار مغناطیسی میله براساس معادله کوری و ضریب کوری برابر $5 \times 10^{-9} K$ باشد، مقدار کار انجام شده روی میله در این فرایند تقریباً چند ژول است؟

$$(1) \quad 2/62$$

$$(2) \quad 0/52$$

$$(3) \quad 1/04$$

$$(4) \quad 5/24$$

۳۳- سیستمی متشکل از N اتم در نظر بگیرید که هر اتم دارای ممان مغناطیسی ذاتی μ است. در حضور میدان مغناطیسی خارجی H ممان مغناطیسی القایی در این سیستم به شکل $M = N\mu(\coth\theta - \theta^{-1})$ است که $\theta = \mu \frac{H}{(k_B T)}$ در حد دماهای بالا χ پذیرفتاری مغناطیسی سیستم چگونه تابعی از دمای T است؟

$$(1) \quad \frac{N\mu^2 H}{2k_B T^2}$$

$$(2) \quad \frac{N\mu^2}{2k_B T}$$

$$(3) \quad \frac{N\mu^2 H}{2k_B T^2}$$

$$(4) \quad \frac{N\mu^2}{2k_B T}$$

۳۴- معادله حالت ماده‌ای به شکل $P(v-b) \exp(a/(RTv)) = RT$ است، که P ، T و v به ترتیب فشار، دما و حجم مولی ماده و R ، a و b ضرایب ثابت مثبتی هستند. فشار و دمای بحرانی این ماده کدام است؟

$$(1) \quad P_c = \frac{a}{2e^2 b^2}, \quad T_c = \frac{a}{2Rb}$$

$$(2) \quad P_c = \frac{a}{4b^2}, \quad T_c = \frac{a}{4Rb}$$

$$(3) \quad P_c = \frac{a}{2b^2}, \quad T_c = \frac{a}{2Rb}$$

$$(4) \quad P_c = \frac{a}{4e^2 b^2}, \quad T_c = \frac{a}{4Rb}$$

۳۵- انرژی داخلی یک گاز معین با معادله تجربی $U = aT + bP$ داده می‌شود، که P و T به ترتیب فشار و دمای گاز و a و b ضرایب‌های ثابت مثبتی هستند. ضریب انبساط حجمی در فشار ثابت گاز برابر $\frac{1}{T}$ و ضریب فشردگی در دمای ثابت آن برابر $\frac{1}{P}$ است. ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت کدام است؟

$$C_v = b - \frac{aP}{T} \quad (۱)$$

$$C_v = a + \frac{bP}{T} \quad (۲)$$

$$C_v = a - \frac{bP}{T} \quad (۳)$$

$$C_v = b + \frac{aP}{T} \quad (۴)$$

۳۶- اگر P فشار، V حجم، T دما، β ضریب انبساط حجمی در فشار ثابت و κ ضریب فشردگی در دمای ثابت یک ماده باشند، کدام رابطه همواره درست است؟

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\beta}{\kappa} \quad (۱)$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_P \quad (۲)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\kappa}{\beta} \quad (۳)$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)_P \quad (۴)$$

۳۷- در محدوده‌ای از دما، فشار بخار آب تابعی از دما به شکل $P = \kappa \exp\left(\frac{A+BT}{C+DT}\right)$ است که A, B, C, D و κ مقادیر ثابتی هستند. اگر حجم ویژه مایع ناچیز و بخار را بتوان گازی کامل در نظر گرفت، گرمای نهان تبخیر چگونه تابعی از دما است؟ (R ثابت عمومی گازها است).

$$R(BC - AD)(T / (C + DT))^2 \quad (۱)$$

$$RT(BC - AD)(A + BT)^2 / (C + DT)^2 \quad (۲)$$

$$R(BC + AD)(T / (C + DT))^2 \quad (۳)$$

$$RT(BC + AD)(A + BT)^2 / (C + DT)^2 \quad (۴)$$

۳۸- در اتم هلیم تفاوت انرژی میان حالت پایه (حالت $1S_0$) و اولین حالت برانگیخته (حالت $3S_1$) برابر $1/6 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ است. در دمای 6000 K نسبت تعداد اتم‌های هلیم در حالت $3S_1$ به حالت $1S_0$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ ($k_B = 1/4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)

(۱) e^{-5}

(۲) e^{-6}

(۳) e^{-4}

(۴) e^{-3}

۳۹- گاز الکترونی آزاد غیرنسبیتی با تعداد N الکترون در حجم V و انرژی شیمیایی μ با تابع توزیع $\langle n_\epsilon \rangle = \left(1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}\right)^{-1}$ را در نظر بگیرید که $\beta = (k_B T)^{-1}$. مقدار μ در دمای صفر مطلق کدام است؟ (h ثابت پلانک و m_e جرم الکترون است.)

(۱) $\frac{h^2}{m_e} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$

(۲) $\frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}$

(۳) $\frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}}$

(۴) $\frac{h^2}{m_e} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$

۴۰- کدام عبارت در مورد a_F ضریب ویریال دوم برای یک گاز فرمیونی ایده‌ال و یک گاز بوزونی ایده‌ال درست است؟

(بسط ویریال به شکل $\frac{P}{k_B T} = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell n^\ell$ است که n تعداد ذرات گاز در واحد حجم است.)

(۱) برای گاز فرمیونی $a_F < 0$ و برای گاز بوزونی $a_F > 0$ است.

(۲) برای هر دو نوع گاز $a_F > 0$ است.

(۳) برای هر دو نوع گاز $a_F < 0$ است.

(۴) برای گاز فرمیونی $a_F > 0$ و برای گاز بوزونی $a_F < 0$ است.

۴۱- تابع پارش کانونی بزرگ یک گاز الکترونی با حجم V و دمای T در حضور میدان مغناطیسی ثابت B توسط

رابطه $\ln Z = \frac{zVeB}{\hbar^2 c} \left(\frac{mk_B T}{2\pi} \right)^{-1/2} \left(\sinh \frac{e\hbar B}{2mck_B T} \right)^{-1}$ داده شده است. ممان مغناطیسی این گاز کدام است؟

(z فوگاسیته گاز، $\lambda^2 = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)$ و $x = \frac{e\hbar B}{2mck_B T}$ است.)

$$\frac{zV}{\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \left(\cosh x - x \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right) \quad (۱)$$

$$\frac{zV}{\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{mc} \right) \left(\frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{zV}{\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \left(\frac{1}{\sinh x} - x \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right) \quad (۳)$$

$$\frac{zV}{\lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{mc} \right) \left(\sinh x - \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right) \quad (۴)$$

۴۲- کدام عبارت در مورد $C_V(N, T)$ گرمای ویژه در حجم ثابت یک گاز ایده‌ال فرمیونی و یک گاز ایده‌ال بوزونی برای تمام مقادیر N و T درست است؟ (N تعداد ذرات گاز و T دمای آن است.)

- (۱) در دو بعد و در حد غیرنسبیتی، گرمای ویژه این دو گاز با هم برابر است.
- (۲) در یک بعد و در حد غیرنسبیتی، گرمای ویژه این دو گاز با هم برابر است.
- (۳) در دو بعد و در حد فوق نسبیتی، گرمای ویژه گاز فرمیونی دو برابر گاز بوزونی است.
- (۴) در یک بعد و در حد فوق نسبیتی، گرمای ویژه گاز بوزونی دو برابر گاز فرمیونی است.

۴۳- در دماهای بسیار پایین (نزدیک صفر مطلق)، تابعیت دمایی گرمای ویژه در حجم ثابت ${}^4\text{He}$ و ${}^3\text{He}$ به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

$$T^3, T^2 \quad (۱)$$

$$T, T^3 \quad (۲)$$

$$T, T^2 \quad (۳)$$

$$T, T \quad (۴)$$

۴۴- سیستمی متشکل از N ذره کلاسیکی غیر یکسان در سه بعد در دمای T در نظر بگیرید. هامیلتونی این سیستم

$$H = \sum_{i=1}^N A_i |\vec{p}_i|^s + B_i |\vec{q}_i|^t \quad \text{است که در آن } \vec{p}_i \text{ و } \vec{q}_i \text{ مختصه و تکانه ذره } i \text{ ام، } A_i \text{ و } B_i \text{ ضریب‌های}$$

مشخصه ذره i ام و s و t عددهای صحیح مثبتی هستند. سیستم در دمای T قرار دارد. انرژی متوسط این سیستم کدام است؟

$$\frac{3N}{4} (s^{\frac{1}{s}} + t^{\frac{1}{t}}) k_B T \quad (۱)$$

$$3N \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{s}}} + \frac{1}{t^{\frac{1}{t}}} \right) k_B T \quad (۲)$$

$$3N \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) k_B T \quad (۳)$$

$$\frac{3N}{4} (s + t) k_B T \quad (۴)$$

۴۵- گازی متشکل از N ذره آزاد با انرژی داخلی E ظرفی به حجم V را پر کرده است. آنتروپی سیستم توسط رابطه

$$S(E, V, N) = Nk_B \left\{ \frac{5}{2} - \ln \left[\lambda^{\frac{5}{2}} N^{\frac{5}{2}} V^{-1} E^{-\frac{3}{2}} \right] \right\} \quad \text{داده می‌شود که در آن } \lambda = \left(\frac{3\pi\hbar^2}{m} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ است. انرژی آزاد}$$

هلمهولتز این گاز $F(T, V, N)$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} Nk_B T \{ \ln[\lambda N / V] + 1 \} \quad (۱)$$

$$Nk_B T \{ \ln[\lambda N / V] - 1 \} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} Nk_B T \left\{ -\ln \left[\lambda (N / V)^{\frac{1}{2}} \right] + 1 \right\} \quad (۳)$$

$$Nk_B T \left\{ \ln \left[\lambda (N / V)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\} \quad (۴)$$

